

CHINESE MATHEMATICAL OLYMPIAD

历届CMO

中国数学奥林匹克试题集

1986—2009

刘培杰　主编

$\sum_{1}^{5} k^5 x_k = a^3$

$\sum_{1}^{5} k^3 x_k = a^2$

$\sum_{1}^{5} k x_k = a$

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS



刘培杰数学工作室

策划编辑 刘培杰
责任编辑 李广鑫
封面设计 孙茵艾

上架建议：奥数类

ISBN 978-7-5603-1334-4
9 787560 313344 >
定价 28.00 元

CHINESE
MATHEMATICAL
OLYMPIAD

历届CMO

中国数学奥林匹克试题集

1986—2009

刘培杰　主编

$\sum_1^5 k^5 x_k = a^3$

$\sum_1^5 k^3 x_k = a^2$

$\sum_1^5 k x_k = a$

哈爾濱工業大學出版社

内容简介

全国中学生数学冬令营是在全国高中数学联赛的基础上进行的一次较高层次的数学竞赛，后改名为中国数学奥林匹克。本书汇集了第1届至24届中国数学奥林匹克竞赛试题及解答，适合于数学奥林匹克竞赛选手和教练员、高等院校相关专业研究人员及数学爱好者使用。

图书在版编目(CIP)数据

历届CMO试题集/刘培杰主编.—2版.—哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2009.7

ISBN 978-7-5603-2715-0

Ⅰ.历… Ⅱ.刘… Ⅲ.数学课-中学-试题 Ⅳ.G634.605

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第127953号

策划编辑 刘培杰
责任编辑 李广鑫
封面设计 卞秉利
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区复华四道街10号 邮编150006
传　　真 0451-86414749
网　　址 http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷 黑龙江省教育厅印刷厂
开　　本 787mm×1092mm 1/16 印张13.5 字数225千字
版　　次 2008年10月第1版 2009年7月第2版
　　　　 2009年7月第2次印刷
书　　号 ISBN 978-7-5603-2715-0
印　　数 3 001~5 000册
定　　价 28.00元

(如因印装质量问题影响阅读，我社负责调换)

序 | Prelude

在首届数学冬令营上的讲话①

吴大任

同学们:

我非常高兴和你们见面。数学这个共同的爱好把我们聚在一起了。你们不但对数学有较浓厚的兴趣,而且已经表现出了对数学有较高的才能。可以肯定,你们当中的绝大多数将要在数学方面继续深造,并且运用这个有力工具为四化服务。我祝愿你们在建设有中国特色的社会主义中,作出自己的贡献。

(一)数学的巨大作用

我们有理由为数学有巨大作用而自豪。

时至今日,数学已经无所不在。基础科学和技术科学中,自然科学和社会科学中,数学的应用越来越广泛。可以说,数学的应用方兴未艾。数学对自然科学包括理论科学和技术科学的重要性,人们都比较了解。我只简略谈谈数学应用于经济学的一些情况,作为它渗入社会科学的一例。数学的许多分支,它的丰硕成果,都用到经济学里去了。数学和经济学相

① 本文是吴大任1986年1月21日对全国数学冬令营营员的讲演词。

结合，甚至产生了像数理经济学、计量经济学这样的自成体系的交叉学科。从1969年到1981年，13次的诺贝尔经济奖中，就有7次可以看成是对应用数学颁发的，其中一次是苏联数学家获得的，他为处理经济问题创立了一项新方法，并得到成功。

18世纪德国大哲学家康德说过："我坚决认为，任何一门自然科学，只有当它数学化之后，才是完备的。"那时候，即使在自然科学中，数学的应用还不广泛，他能有这样的预见，是难能可贵的。马克思对康德这句话十分欣赏。康德那个时候，还不能预见到数学对社会科学的作用。现在康德的预言已经实现，而且对社会科学也在实现中。有人甚至说，人文科学也可能数学化。

（二）数学应用广泛的根本原因

为什么数学有那样大的威力呢？最根本的原因是，数学研究的对象是空间形式和数量关系，而这两者正是客观世界一切事物共同的基本要素。所以柏拉图说："数学是现实世界的真髓。"19世纪一位数学家说："数学是科学的语言。"这都是对数学本质的很好概括。

数学来源于实践，这和一切科学没有什么不同。所不同的是，别的科学必须研究事物的具体性质，或多或少，涉及它们的某些方面的特殊性，而数学则只研究它们的共性，并且把这些共性抽象化，把其中规律加以高度概括。我们说"一加二等于三"不说"一本书加两本书等于三本书"。我们说，圆周长等于圆周率乘直径，不管是圆桌边还是地球赤道。由于这个原因，数学就有自己的概念符号以及表达其规律的特殊方式。数学家对客观事物的形状和数量中的五花八门的关系进行分析，找出其中少数最简单而基本的作为公理，然后从公理出发，通过严格的逻辑推理来得到其他关系。这些概念、符号、表达形式等放在一起，就成为数学语言。无论自觉或不自觉，我们都是这样做的。其结果，就是从比较简单的关系，推得比较复杂的关系。数学以及它的各个分支就这样逐步建立起来了。

数学来源于实践，而在数学推导中，又不联系到它的实际内容，这不是脱离实际，恰恰相反；这使得它的结论会有最广泛的（也许是潜在的）实际应用。与此同时，数学家对所得到的结果通过分析综合，找出其内在联系，整理成一定的体系，并逐步使它成为完善的逻辑结构。对于这种过程，我们就常

说:数学内部的矛盾促使它相对地独立于实践而发展。历史上一个著名的例子,就是非欧(几里得)几何的发现。在欧几里得《几何原本》出世之后,无数的数学家考察了它里面的公理体系。在这些公理中,有一个现在称为平行公理的第五公设。它本质上是说:已给一条直线和不在它上面的一点,恰好有一条直线经过所给点而平行于所给直线。人们希望从其他公理推得平行公理,但一切尝试都失败了。经过了两千多年,在十九世纪,人们终于认识到平行公理和其他公理是完全独立的,如果用另一个公理来代替平行公理,具体地说,假定有两条直线经过所给点而和所给线不相交,就得到了和欧几里得几何不同,但在逻辑上完全不含任何矛盾的双曲几何学,这就是两种非欧几何学之一(另一种非欧几何叫做椭圆几何)。起初,许多人不承认双曲几何,又过了几十年,才彻底证明了双曲几何和欧氏几何在逻辑上有同等的地位。到二十世纪初,狭义相对论创立,闵可夫斯基几何对相对论提供了天然的几何阐述,它和非欧几何的理论基础联系密切,非欧几何的实践意义才获得进一步承认。

另一方面,微积分和几何相结合,产生了微分几何。就在非欧几何出现后不久,黎曼推广了高斯关于曲面的成果,建立了黎曼几何,它成为广义相对论的基础。广义相对论的出现,促使近代的伟大几何学家E·嘉当用十年时间来研究各种联络的空间,这些研究后来导致陈省身等创立纤维丛理论。物理学家杨振宁说:“我所惊叹的是,(物理中的)规范场恰好就是纤维丛上的联络,而后者是数学家没有参照物质世界所发展起来的。”在我们看来,这是十分有意思的事例,但并不奇怪。因为数学既然是从实际中来的,它本质就是联系着实际的。在它的自我完善中,有时似乎是离实际很远,但联系着它和实际的纽带并没有完全割断,它的成果,有朝一日又能用来说明或解决实际问题,就是很自然的了。可以认为,纤维丛和规范场的同一性是客观世界统一性的反映。

上面举的例子也表明,数学(包括其中最抽象的部分)是如何和其他学科交织在一起,互相作用,互相促进的。而这也是数学发展最重要的动力之一。伟大的数学家希尔伯特说过:“只要一门(数学)分支能提出大量的问题,它就充满着生命力;而问题的缺乏,就预示着独立发展的中止。”数学的问题是哪里来的?一部分来自它的内部矛盾,但更多的则来自实践。应用数学大师,现代计算机的创始人冯·诺伊曼说:“大多数最美妙的灵感来源于经验。”就是这个道理。数学和实践是

有直接联系的,优选法就是一例,但更多的是间接的,是通过其他科学的。著名数学家F·克莱因指出:“最伟大的数学家,像阿基米得、牛顿和高斯,总是把理论和应用等量地糅合在一起。”其实,不止数学家,历史上其他伟大的科学家也总是不同程度上把自己的学科和别的学科相结合的。可以说,当一门科学和其他科学割裂的时候,它发展就相对地慢,而当它和别的学科结合的时候,它发展就快。当前,不同科学的结合,产生了难以尽数的交叉学科,这是现代科学发展的一个特点,也是现代科学之所以迅速发展的一个重要因素。本来,客观世界是一个统一体,反映客观世界的科学也应当是统一的。分成不同学科是为了研究的便利。把不同学科相结合,在一定意义上就是部分地还其本来面目。这样看,交叉学科之富有生命力就不足为奇了。苏东坡咏庐山诗:“横看成岭侧成峰,远近高低各不同,不识庐山真面目,只缘身在此山中。”要认识庐山真面目,就要坐上飞机,要认识地球真面目,就要坐上航天飞机。瞎子摸象,有很大局限性,但如果多摸几个部位,也能对大象的轮廓获得较多的了解。

话说远了,让我们回到本题。在学科与学科的结合中,数学处于非常特殊的地位。因为数学可以和一切其他学科直接结合,而它又是打开科学大门的钥匙,没有它就难以深入到事物的本质。数学和其他学科结合,产生了应用数学;和不同学科结合,就有不同的应用数学。数学本身也还是一个整体,“分家”仍然是为了研究的便利。有人出于个人的爱好,认为只有纯粹数学是好的或漂亮的,而把应用数学说成是坏的或不漂亮的数学,这是不公正的。从逻辑体系看,纯粹数学是基础,应用数学是派生的;但从实践观点看,谁也离不开谁,就像一棵树的根、躯干和枝叶那样。

(三)中国数学的状况

现在我想谈谈中国的情况。

我们都知道,我国古代数学和其他科学都有着光辉的成就,许多成果比外国早得多。到近几百年,西方后来居上,把我们远远抛在了后面。我国老一辈的数学家努力把现代数学移植到国内,使它生根发芽,工作是很艰苦的。移植,首先是培养人,其次也作些研究工作。但是,在那时的半封建半殖民地社会,生产建设规模小,战乱频繁,数学工作者的活动范围基本上限于纯粹数学研究,工作也只能是零散的。新中国成立以后,形势有了根本改变,数学工作者们感到有用武之地了。

特别是从1956年制订科学规划起，不但纯粹数学，应用数学也受到了重视，特别是1958年展开的“教育革命”，强调了理论联系实际，许多数学工作者大搞应用研究，有些纯粹数学的转到了应用数学方面。这是好现象。缺点是基础数学受到了削弱。三年困难时期过后，情况有所转变，可惜好景不长，又发生了“文化大革命”。培养人的工作停顿了，科研工作中止了，只有个别可以直接取得经济效益的数学应用，还能进行一些。这样，数学，和其他科学一样，新中国成立后本来在缩小中的同先进国家的差距，又拉大了。

“文化大革命”结束，开始了中国的历史新篇章，也开始了数学教育和科研的新篇章。和国外交流的增加，使我们对自己的差距有了比较明确的认识。这激励我们非全力以赴地赶上去不可，而中央四个现代化的要求和十一届三中全会以后的英明决策，又创造了能够赶上的条件。几年来，中国数学会组织了四次全国性会议和为数众多的专业会议。前后比较，我高兴地看到，大批年轻有为的数学家正在迅速成长。我们的研究工作和国际上前沿工作的联系，也明显地多起来了。我们的信心大为增强，我们的前途无比光明。

但是，必须清醒地估计我们的现状。我们的数学队伍已经不小，但和先进国家比，还不够壮大，总的来说，质量还不够高。我们的研究成果，有的居于前列，个别的处于领先地位，但面还不够宽，而且还有缺门。我们多数的研究课题，涉及的面较窄，因而没有足够的分量。这些都是现阶段难以避免的。无论我的这些估计对或不对，都应当这样看：认识差距，才能缩短以至消灭差距。

有一个现象不能不引起我们严重关注，那就是，人们对数学重要性的认识还缺乏深度。我们对数学事业的支持还有待加强。例如在高等学校，数学以外的专业还没有开设足够的数学课程(包括选修课程)，以满足部分有较高数学才能的学生的要求。包括数学专业在内，急于求专，忽视基础的现象还严重存在。基础不宽不牢，提高就要受到限制。近几年来，高考中报考数学(还有物理)专业的很不踊跃。这个现象如果不改变，其后果将是很严重的，我们不应当要求有数学才能的青年都去学数学，但是，中国如果没有一定数量的高水平数学家，我们的科学技术就不可能立足于国内。

造成这些令人不安的情况，原因是多方面的，在这里我不进行全面分析。我只谈谈数学重要性为什么不易为人们所充分了解。首先，它的语言是非大众化的。对于专家来说，这种

语言有利于准确地表达抽象而带高度概括性的数学概念和关系。遗憾的是,其发展趋势离大众化不是越来越近而是越来越远。我现在感到,这个矛盾很难统一。我希望有人能用大众化的语言来阐明现代数学,只要说得明白而准确,哪怕噜苏一点也行。其次数学直接应用的少,间接应用的多。数学通过别的学科应用于实际,人们往往归功于那个学科而忽略了数学的作用。这个时候,数学便成了无名英雄。“英雄”,因为没有它不可;“无名”,因为“论功行赏”时,它没有份。数学是不声不响地渗入到科学技术各个领域的。在这方面,我们特别应当感谢不久前去世的华罗庚同志。他搞了那么多带来直接经济效益的数学应用,又写了那么多数学普及读物,对帮助人们认识数学起了很大作用。

了解过去和现状,才能规划未来。我讲这段话是要说明:第一,我们数学目前和世界先进水平的差距还是不小的;第二,要避免重复过去对纯粹数学和应用数学认识的片面性;第三,要宣传数学的巨大作用。在强调经济效益的今天,最后一点是特别重要的。我们高兴的是,在中央的关怀和扶持下,我们已经有了科学院的几个关于数学的研究所和北京大学、复旦大学、武汉大学等数学研究所,又把原来的南开大学数学研究所改组成“立足南开,面向全国,放眼世界”的南开数学研究所。我以为,成立这个所的目的,就是在国内建立一个和世界有较多联系的,培养现代数学人才和发展现代数学研究的基地。全国数学界正在紧密团结合作来把它办好。

(四)对同学的几点建议

同学们!为四化服务,你们可以把数学作为工具来从事其他专业的工作,也可以把数学作为自己的终身事业。在后一种情况下,你们可以成为纯粹数学工作者,也可以成为应用数学工作者。那么在学习和研究数学中,有哪些需要注意的问题呢?我想提几点建议,供大家参考。

首先,要尽可能把基础打得宽广些、扎实些。这是老生常谈了。在这里所谓基础数学包括分析、代数和几何。许多年来,几何没有受到应有的重视,这是不恰当的。因为这三方面也是互相联系,互相促进的,不能偏废。许多数学家,包括希尔伯特在内,都曾强调过几何的重要性。

在现代物理中,几何的作用更是突出的。

我们不能搞实用主义,特别是对基础数学,不要认为有用的就学,用处不明显的就不学。现在,在国内、在苏联,都开始

注意到这个问题,都在适当加大几何和代数的比重,并且开始尝试把这三个分支在一定程度上结合起来讲授。我所谓扎实,就是掌握好基本概念和方法,培养自学能力、分析能力、运算能力、逻辑推理和逻辑表达等能力。要创造性地学习,要作书本的主人,不作书本的奴隶,还要学习查文献。这些要通过实践环节来逐步达到。基本功扎实了,就能够通过自学来学到在课堂上没有学到的东西,否则就会在业务上停滞不前,更谈不上创新。

对于有志从事应用数学的人,当然要兼顾某一门或更多门其他学科,这是不在话下的。现在不是有双学位制吗?这是个好制度。在一个专业毕业,再作为另一个专业的研究生继续学习,也是发展应用数学的一种方式。据我了解,许多应用数学家是纯粹数学家出身的,因为学数学的兼学别的学科比较容易,反过来就比较困难。

对于有志从事纯粹数学工作的人,最好也能学点别的学科。在数学内部,也力求知识面宽一些,经典的要学,现代的也要学。英国著名数学家阿梯亚说:"数学像是发育中的机体,它同过去以及同其他学科的联系是历史悠久的。"数学内部的横向联系,当然也是这样。数学家常常意外地发现各个数学分支之间有许多相似的地方;它们是可以互为工具,互相启发的。1983年三个菲尔兹奖获得者(其中有一位是丘成桐)都是由于他们在几何和分析的交叉领域中的工作而被评上的。这当然有偶然性,但偶然性是寓于必然性之中的。伟大的数学家往往是精通几个分支的,但这不妨碍他以其中一两个分支为主。

为了扩大知识领域,扩展视野,我们提倡交朋友,交同行朋友,也交不同行的朋友。南开数学所每年确定一两个研究方向,各年方向不同,年年邀请有关方面的国内外专家来进行研究和学术交流,这是我们的数学工作者广交朋友、扩大视野的好机会。

其次要分清当前数学研究的主流和支流。主流就是最活跃的研究领域,问题最丰富的领域。主流不是国内一段时间在"业余数学家"中出现的热门,像一个时期的四色问题、哥德巴赫问题之类。年轻同志在主流中选题较容易学到新概念、新方法、新成果,也较容易做出有意义的结果。非主流的东西也可以做,但不能成为多数人的主攻方向。学点数学史,了解数学的过去和现状,了解它的发展规律,也便于识别主流和支流。

第三,要不懈地、勤奋地工作。我非常欣赏"天才来自勤奋"这句话。人的天赋是有所不同的,但是天赋好的不少,科学上取得好成就的相对地不多,起决定作用的还是勤奋。我还非常欣赏体育界流行的一句话"从头开始"。不因胜利而骄傲自满,不因失败而丧失信心。在座的同学在数学竞赛中取得好成绩,现在也要"从头开始"。在一切工作中,总有成功和失败,在数学研究中更是失败多于成功,失败提供反面经验,而有些反面经验比正面经验更宝贵。

任何重大成就都是不是侥幸得来的。牛顿看到苹果落地而发现万有引力,瓦特看到水壶中的水烧开后把壶盖掀起而发明蒸汽机,这种传说是很片面的。有人把这叫做"灵感",那么这种灵感就来自长期的观察和深入思考,而不是凭空突然发生的。许多人都有这样的经验:当他对一个问题钻研很久,碰到困难,解决不了时,他在休息当中或者休息以后会忽然发现解决问题的途径。有人会在半夜睡觉醒来的时候,或在卫生间里找出办法。英国数学家李特伍德说,他有不少问题是星期一解决的。我自己也有这样的经验,假期之后,常常容易获得研究的进展。这说明脑力劳动要"一张一弛"。在紧张的脑力劳动之后,特别是遇到难以克服的困难时,就该休息一段时间,再把工作捡起来。这会提高效力。

同学们! 陈省身教授认为,到本世纪末,中国可能成为数学大国。这是有根据的。历史和现状都证实,中国人是有数学才能的,我们又处在新中国成立以来政治经济最好的时期。到 1990 年,你们大学毕业,到本世纪末,你们已从事科学工作十年。那时我国要达到小康水平,成为数学大国,都包含着你们的贡献。你们工作到八十岁,就到了 21 世纪中叶,可以预期,那时候中国在各个方面,包括数学在内,都会处于领先地位。这将是在座同学和全国人民一道奋斗的结果。

祝愿冬令营成功,同学们前途无量!

吴大任(Wu Daren,1908—),中国人。出生于天津市(祖籍广东省肇庆市)。1930 年毕业于南开大学;1933 年赴英留学;1935 年获硕士学位;1935 年至 1937 年在德国汉堡大学进修积分几何;1937 年回国后先任武汉大学、四川大学教授,后任南开大学教授、教务长、副校长。还曾任中国数学会副理事长。

吴大任在几何学方面作出了贡献。他对三维椭圆空间的积分几何作了系统研究,并得到其中运动的基本公式。他出版了《微分几何讲义》(人民教育出版社,1959)等著作。

前言 | Preface

中学生参加数学竞赛对他们一生都有着深刻的影响，如印度天才数学家拉马努金，在高中阶段就经常赢得数学问题解决竞赛第一名，以至他的校长纳斯瓦米·耶耳(Krishnaswami Iyer)在1904年授予他“K·郎迦纳萨·榣(K. Ranganatha Rao)数学奖”时评价说：“拉马努金是如此出色，满分也不足以说明.”非线性科学中的最为大众所知晓的通俗解释是“蝴蝶效应”，即非线性系统的输出对初始条件有敏感依赖性(就是古语所云：差之毫厘，谬以千里)。从人的成长来看人的童年和少年的经历就类似于初始条件，而人成年后的行为则类似于数学中函数 n 次迭代结果，而人生显然是非线性的(线性行为多为决定性的，而非线性以非决定居多)，我们来看一个典型的与数学竞赛有关的蝴蝶效应.

卡尔·波莫伦斯(Carl Pomerance)在美国读高中时参加了一次数学竞赛，其中有一道题目是要求分解8 051，并要求在5分钟之内完成，而当时还没有微型计算器，虽然波莫伦斯长于心算，但他决定首先看看，是否可以找到一个巧妙的捷径，而不是通过一个一个地尝试来找到答案，他回忆说：“我用了两分钟左右寻找新方法，逐渐地我觉得自己浪费了太多时间，我开始变得焦急，于是重新开始尝试可能的因子，但由于时间浪费太多，我没有做出这道题.”

分解8 051的失败，激起了波莫伦斯一生对于快速分解整数方法的研究，并最终发明了“二次筛选法”.1994年4月，

两位数学家阿仁·兰斯特拉(Arjen Lenstra)和马克·玛纳斯(Mark Manasse)使用波莫伦斯的“二次筛选法”,集合了 24 个国家数百台计算机的威力,加上 8 个月的实时计算终于破解了 MIT 三剑客 RSA,即罗恩·瑞威斯特(Ron Rivest)、莱昂纳德·阿德曼(Leonard Adleman)和阿迪·沙米尔(Adi Shamir)提出的挑战 RSA129,而三剑客开始估计需要 4×10^{16}年才能破解.

从 8 051 到 RSA129 就是从数学竞赛到数学研究的过程.

类似的例子很多,如领袖数学家法国的庞加莱(Henri Poincare)在 1871 ~ 1872 学年的全面基础数学竞赛中获得了头等奖;1872 ~ 1873 学年他进入了特殊数学班,并再次获得全面竞赛的头等奖.这使得他对数学产生了浓厚的兴趣,最后成为一代大师.

在青少年成才的规律中还有一个皮格马利翁效应,即人们期待你成为什么样的人你就会成为什么样的人.现在密码学中最热门的话题是椭圆曲线,这些曲线由具有特殊形式的方程所定义,并在安德鲁·怀尔斯关于费马大定理的证明中处于核心地位,它们已经作为一种快速地将整数分解为素数的方法进入了密码学世界,华盛顿大学西雅图分校的尼尔·柯布利兹(Neal Koblitz)在 20 世纪 80 年代中期就研究利用椭圆曲线来进行加密.

作为一名资深的数学家,柯布利兹对数学有很高的热情,他回忆说那是由童年时期意外发生的一连串偶然事件引起的:

“当我 6 岁时,我们全家在印度的巴罗大(Baroda)待了一年,那里学校对数学的要求比美国的要高许多,第二年当我返回美国时,我已经超过同班同学一大截,我的老师误认为我对数学有特殊天分.就像其他一些容易在头脑中形成的错误概念一样,这种错觉逐渐变成了一种自我实现的预言.我从印度回来之后受到的所有鼓励,促使我走上了数学家的道路.”

我们必须强调一点,任何形式的考试都只能判断出一个人是否优秀但不足以判断一个人是否天才。例如法国心理学家比奈(Alfred Binet,1859—1911)发明的智商测试方法在一段时间内被公认为比较科学,但是数学界的领袖人物庞加莱在数学和科学创造与普及的影响都达到巅峰时,曾参加了一组比奈智力测试,他的表现大失水准,被判为傻子,人们把这归结为天才通常比测试的发起者或组织者看问题更深远,所以有些数学家也考不过中学生.

另外,参加数学竞赛越早对其一生的影响越深远,这并不

是像张爱玲所说的“成名要趁早”，而是因为中学阶段正是观念形成的重要时期.

意大利解析数论专家邦比里(Enrilo Bombieri)因为对黎曼假设的成立有一种绝对的信心.这像是一种宗教的信仰.“如果它不正确，那么整个世界都将崩溃，因此它必须正确.”为此邦比里详细地描述过了这点：“当我在十一年级的时候，我读过一些中世纪哲学家的东西，其中一位叫奥卡姆(William of Occam).他提出过一个思想，当我们必须在两种解释中选择一个的时候，总是应该选简单的那一个.这就是奥卡姆剃刀的原则，排除困难的，选取简单的.”对邦比里而言，落在临界线之外的零点就像是管弦乐队中某件乐器“掩盖了其他乐器的声响——这是一种非美学的情形.作为奥卡姆剃刀的忠实信徒，我拒绝接受这个结论，因此我相信黎曼假设是正确的”.

对于国际中学生数学奥林匹克，陈省身说：“这项竞赛的难度是高中程度，不包括微积分，但题目需要思考，我相信我是考不过这些小孩子的.因此有人觉得，好的数学家未必长于这些考试，竞赛胜利者也未必是将来的数学家.这个意见似是而非.数学竞赛大约是在百年前在匈牙利开始的，而匈牙利产生了同它的人口不成比例的许多大数学家.”在匈牙利那些大数学家中没有参加过数学竞赛的只有两位——爱尔特希和冯·诺伊曼，而这两位据说都是因为竞赛时没在国内.(陈省身.怎样把中国建为数学大国.原载《数学传播》第 14 卷第 4 期，1990 年 12 月)

在许多公开的数学竞赛中，学生并不一定会输给职业数学家，例如在全世界范围的寻找大素数的竞赛中，开始是数学家领先，如著名数学家罗宾逊的丈夫拉非尔·罗宾逊，他在伯克利的数学家们的协助下，在一台由小莱默建造的叫做标准西部自动计算机(Standards Western Automatic Computer)上发现了一个大梅森素数 $2^{2\,281}-1$，而一位加拿大的学生麦克尔·卡梅隆(Michael Camevon)1 个人仅用个人计算机就证明了 $2^{13\,466\,917}-1$ 为素数，这是一个超过 400 万位的数.

对于想进一步学习数学的学生参加数学竞赛是大有益处的.陈省身教授说：“我们每年派去参加国际数学奥林匹克数学竞赛的中学生都很不错.虽然中学里数学念得好将来不一定都研究数学，但希望有一部分人搞数学，而且能有所成就.昨天，我和在北京的一些数学竞赛中获奖的学生见面，谈了话.我对他们说，搞数学的人将来会有大的前途，10 年、20 年之后，世界上一定会缺乏数学人才.现在的年青人不愿念数学，

势必造成人才短缺.学生不想念数学也难怪,因为数学很难,又没有把握.苦读多年之后,往往离成为数学家还很远.同时,又有许多因素在争夺数学家,例如计算机.做一个好的计算机软件,需要很高的才能,很不容易,不过它与数学相比,需要的准备知识较少.搞数学的人不知要念多少书,好像一直念不完.这样,有能力的人就转到计算机领域去了.也有一些数学博士,毕业后到股票市场做生意,例如预测股票市场的变化.写个计算机程序,以供决策使用,其收入比大学教授高得多了.因此,数学人才的流失,是世界性的问题."(科技导报.1992年第11期)

10多年过去了,陈老的话应验了,数学人才成了稀缺资源,特别是高端的数学人才.当然部分原因是由于我们国家选拔人才的途径还比较少.数学竞赛官方承认的只有初、高中全国数学联赛几种,而像美国类似的大奖却有很多,如英特尔科学与工程大奖赛(Intel ISEF)(从原来的西屋奖改来,原名为Siemens Westinghoues Science and Technology Competition).它是美国历史最悠久的一项高中科学竞赛,该科学奖常常成为高中生进入哈佛、耶鲁等名牌大学的"录取通知书",人们将该奖项看做是未来科学家的摇篮,自该奖设立以来的54年间,获奖者中已有30人成为美国国家科学院院士,5人获诺贝尔奖.2006年获奖者是年仅16岁的美国加州少年迈克尔·维斯卡尔迪(Michael Viscardi),他凭借对一个历史悠久的数学难题——"迪利克雷(Dirichlet)问题"的全新解法获奖,并斩获高达10万美元的奖学金.

在英国也有类似的科学竞赛,优秀选手层出不穷.1991年1月《泰晤士报》刊登了一篇头版文章,标题是"少女破解电子邮件密码".这项成就为爱尔兰少女萨拉·弗兰娜瑞(Sarah Flannery)获得了一项科学竞赛的奖励.弗兰娜瑞以一篇长达50页题为《密码研究——一种与RSA相对的新算法》(《Cryptography: A New Algorithm Versus the RSA》)的报告获物理、化学和数学类第一名,并荣获大赛全能奖,被提名为1999年"爱尔兰年度青年科学家".1999年9月.弗兰娜瑞又以一篇题为《密码学——和RSA相对的一种新算法的研究》(《Cryptography: An Investigation of a New Algorithm Versus the RSA》)的报告被提名为1999年欧洲青年科学家,获得了5 000欧元的奖励并参加了在瑞典举行的诺贝尔颁奖典礼.

不过在中国这个不足正在开始弥补.2008年3月26日,在北京隆重地举办了"丘成桐中学数学奖"启动仪式,这是丘

成桐先生提议并得到泰康人寿保险响应的一个面向全球华人青少年的大赛.希望通过专题研究,培养新一代中学生的数学素养,引发青年人探索知识的兴趣及提升他们的创新能力.第一届"丘成桐中学数学奖"颁奖仪式定于2008年10月24日在北京举行,届时美国哈佛大学、布朗大学等名校的本科招生主任将会出席,并面试部分获奖学生.

本书是刘培杰数学工作室继成功推出《历届IMO试题集》之后的续集,接下来还会有《历届美国大学生数学竞赛试题集》,《历届俄罗斯大学生数学竞赛试题集》.这几本试题集的一个共同特点是先易后难,体现了这几种竞赛活动从幼稚走向成熟的过程,也表明选手们一代更比一代精.前苏联数学不论是中学还是大学均领先于我们姑且不论,而美国单就数学竞赛而言是弱于中国的,但大学例外,其早期也不像我们想象的那样强.

美国早期的大学主要是为了训练神职人员,因而紧跟英国的计划,将他们的工作主要限制在拉丁文和希腊文,结果,即便是硕士学位的科学课程,也没有什么价值,1700年前美国产生的唯一数学硕士论文的标题是"圆面积可求吗",这篇论文1693年出现在哈佛大学,还好作者认为是可求的.

为了更清楚地看出早期美国大学数学的标准,我们找到了1718年耶鲁大学学士学位论文的若干题目,水平之低,可见一斑.

1.任何给定的数乘以一个小数,其值减小,而除以一个小数,其值增大.

2.被乘方的数可以从开方得到.

3.给定三角形底和高,底角不能用含有正弦函数的公式表达.

4.运用对数能精确求解三角问题.

5.球体表面积是其最大圆周面积的4倍.

当然这并不能说明西方人不聪明没有学习数学的天分,而是说在当时并不重视这一学科.有一则轶事是说,19世纪英格兰数学家哈米尔顿发现四元数的热情鼓励着泰特(Peter Guthrie Tair,1831—1901),在剑桥大学当学生时,那儿的数学教授总被人嘲笑没有《圣经》知识,泰特和另一个学数学的同学决心为他们雪耻.结果在接下来的两年里,他们相继赢得了《圣经》知识竞赛的一等奖.就是说学数学的人素质是有的,关键是是否重视.早年东西德国未合并之前,东德在IMO一直是屈居末位.后来当时的执政党专门开了一次政治局会议研究这一问题,结果第二年就跃居首位.

目前社会上有些人将数学奥林匹克妖魔化,这并不足怪,因为纵观历史我们发现对数学的轻视、敌视也曾反复出现,如中世纪宗教领袖奥古斯丁就曾说过:“好的基督徒应该警惕数学家和所有制造空洞预言的那些人,危险已经存在,数学家已经与魔鬼结盟,要一起来败坏灵魂,把人们禁闭在地狱.”

公元4世纪时,在罗马皇帝的法典中有:“任何人都不要向占星士和数学家请教.”在公元6世纪的法典中也有一条“关于凶犯、数学家和类似的人”的法律。将凶犯和数学家并列是对数学最大的不敬,而现在社会上也有人将奥数和杂技并列,其实奥数是社会留给天才人物的一架后楼梯,否则类似拉马努金那样的超级天才只能偶然地被哈代发现而别无他途。

会解难题是数学天才的最显著特征,以至于好莱坞的编剧们都知道这一点.

由马特·戴蒙担任主演的好莱坞电影《心灵捕手》(《Good will Hunting》)讲的是一个出生于劳苦家庭的野孩子,在剑桥的后街里巷中长大.他是麻省理工学院的门房警卫,没事的时候常与地痞流氓厮混,打架斗殴.然而麻省理工学院的教授们却吃惊地发现,这个市井小地痞实际上是个数学天才,对于看似纠缠不清的数学难题,他能够一挥而就地写出答案.意识到这个野小子已经自己学完了高等数学以后,其中一个教授脱口而出地说他就是“下一个拉马努金”.

任何一个高中生如果仅凭自己能独立解出本书中的全部题目,那他也很有可能就是下一个拉马努金,我们期待发现他.

原定本书由吴康先生作序,但因吴先生身体有恙,故由我代之.

刘培杰

2008.8.20

目录

中国数学奥林匹克(CMO)简介 (1)

第 1 届中国数学奥林匹克 (3)
天津,1986

第 2 届中国数学奥林匹克 (14)
北京,1987

第 3 届中国数学奥林匹克 (21)
上海,1988

第 4 届中国数学奥林匹克 (27)
合肥,1989

第 5 届中国数学奥林匹克 (35)
郑州,1990

第 6 届中国数学奥林匹克 (40)
武汉,1991

第 7 届中国数学奥林匹克
(46)
北京,1992

第 8 届中国数学奥林匹克
(53)
济南,1993

第 9 届中国数学奥林匹克
(58)
上海,1994

第 10 届中国数学奥林匹克
(67)
合肥,1995

第 11 届中国数学奥林匹克
(73)
天津,1996

第 12 届中国数学奥林匹克
(79)
天津,1997

第 13 届中国数学奥林匹克
(89)
广州,1998

第 14 届中国数学奥林匹克
(96)
北京,1999

第 15 届中国数学奥林匹克
(105)
合肥,2000

第 16 届中国数学奥林匹克
(112)
香港,2001

第 17 届中国数学奥林匹克
(122)
上海,2002

第 18 届中国数学奥林匹克
长沙,2003 (132)

第 19 届中国数学奥林匹克
澳门,2004 (142)

第 20 届中国数学奥林匹克
郑州,2005 (149)

第 21 届中国数学奥林匹克
福州,2006 (157)

第 22 届中国数学奥林匹克
温州,2007 (167)

第 23 届中国数学奥林匹克
哈尔滨,2008 (175)

第 24 届中国数学奥林匹克
琼海,2009 (183)

后记 (191)

中国数学奥林匹克(CMO)简介

(全国中学生数学冬令营)

全国中学生数学冬令营是在全国高中数学联赛的基础上进行的一次较高层次的数学竞赛。1985年,由北京大学、南开大学、复旦大学和中国科技大学四所大学倡议,中国数学会决定,自1986年起每年1月份举行全国中学生数学冬令营,后又改名为中国数学奥林匹克(Chinese Mathematical Olympiad,简称CMO)。冬令营邀请各省、市、自治区在全国高中数学联赛中的优胜者参加,人数为100多人,分配原则是每省市区至少一人,然后设立分数线择优选取。冬令营为期5天:第一天为开幕式;第二、第三天考试;第四天学术报告或参观游览;第五天闭幕式,宣布考试成绩和颁奖。

CMO考试完全模拟IMO进行,每天3道题,限4.5小时完成。每题21分(为IMO试题的3倍),6个题满分为126分。题目难度接近IMO,颁奖也与IMO类似,设立一、二、三等奖,分数最高的前20至30名选手将组成参加当年国际数学奥林匹克(International Mathematical Olympiad,简称IMO)的中国国家集训队。

从1990年开始,冬令营设立了"陈省身杯"团体赛。从1991年起,全国中学生数学冬令营被正式命名为中国数学奥林匹克,它成为目前中国中学生最高级别、最具规模、最有影响的数学竞赛。

注:后附历届全国中学生数学冬令营一览表。

历届全国中学生数学冬令营一览表

届次	年份	地点	承办单位
1	1986	天津	南开大学
2	1987	北京	北京大学
3	1988	上海	复旦大学
4	1989	合肥	中国科技大学
5	1990	郑州	《中学生数理化》编辑部
6	1991	武汉	华中师范大学
7	1992	北京	北京数学奥林匹克发展中心
8	1993	济南	山东大学
9	1994	上海	复旦大学
10	1995	合肥	中国科技大学
11	1996	天津	南开大学
12	1997	杭州	浙江大学
13	1998	广州	广州师范学院
14	1999	北京	北京大学
15	2000	合肥	中国科技大学
16	2001	香港	香港数学奥林匹克委员会
17	2002	上海	上海中学
18	2003	长沙	长沙一中
19	2004	澳门	澳门教育暨青年局
20	2005	郑州	郑州外国语学校
21	2006	福州	福州一中
22	2007	温州	温州一中
23	2008	哈尔滨	哈尔滨师大附中

第1届中国数学奥林匹克

天津,1986

1986年夏天,我国正式派出六名中学生参加第27届国际数学奥林匹克.为了选拔集训队员,1986年1月21日至25日,在天津南开大学举办了首届全国中学生数学冬令营.不言而喻,为时两个上午的数学竞赛是这一次冬令营的最重要的活动.以这次竞赛的成绩作为依据,从78名营员中选拔出21名集训队员,经过为期3个月的专门训练之后,再通过严格的考试选拔出的6名同学,就是代表我国出席第27届国际数学奥林匹克的选手了.

试题及其解答如下.

1 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为实数,如果它们中任意两数之和非负,那么对于满足

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=1$$

的任意非负实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$,有不等式

$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n\geqslant a_1x_1^2+a_2x_2^2+\cdots+a_nx_n^2$$

成立.请证明上述命题及其逆命题.

证明 先来证明逆命题.对于 $1,2,\cdots,n$ 中的任何不同的两个数 i,j,取 $x_i=x_j=\frac{1}{2}$,其余的 $x_k=0,k\neq i,j$.由于这一组数能使不等式成立,得到

$$\frac{1}{2}(a_i+a_j)\geqslant\frac{1}{4}(a_i+a_j)$$

即 $a_i+a_j\geqslant 0$,这就证完了逆命题.

至于命题本身,有许许多多的证法,限于篇幅,这里只列举三种.

证法1 由于 $x_1+x_2+\cdots+x_n=1$,所以

$$\begin{aligned}a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=&(a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n)\cdot\\&(x_1+x_2+\cdots+x_n)=\\&a_1x_1^2+a_1x_1x_2+\cdots+a_1x_1x_n+\\&a_2x_1x_2+a_2x_2^2+\cdots+a_2x_2x_n+\cdots+\\&a_nx_1x_n+a_nx_2x_n+\cdots+a_nx_n^2\end{aligned}$$

由此可知

$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n-(a_1x_1^2+a_2x_2^2+\cdots+a_nx_n^2)=$$
$$(a_1+a_2)x_1x_2+(a_1+a_3)x_1x_3+\cdots+(a_1+a_n)x_1x_n+$$
$$(a_2+a_3)x_2x_3+\cdots+(a_2+a_n)x_2x_n+\cdots+$$
$$(a_{n-1}+a_n)x_{n-1}x_n$$

由题设可知,最后的这个和式是非负的.证毕.

证法2 当 $0\leqslant x_i\leqslant 1$ 时,总有 $x_i^2\leqslant x_i$;因此如果 $a_6\geqslant 0$ 对 $i=1,2,\cdots,n$ 均成立时,不等式显然是成立的.

设在 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中有一个负数,无妨设 $a_1<0$,由条件 $a_1+a_j\geqslant 0(j=2,3,\cdots,n)$,可知 $a_j\geqslant -a_1>0$.因此

$$a_1x_1(1-x_1)+a_2x_2(1-x_2)+\cdots+a_nx_n(1-x_n)\geqslant$$
$$a_1x_1(1-x_1)-a_1x_2(1-x_2)-\cdots-a_1x_n(1-x_n)=$$
$$-a_1(x_2(1-x_2)+\cdots+x_n(1-x_n)-x_1(1-x_1))=$$
$$-a_1(x_2(1-x_2)+\cdots+x_n(1-x_n)-x_1(x_2+\cdots+x_n))=$$
$$-a_1(x_2(1-x_1-x_2)+\cdots+x_n(1-x_1-x_n))\geqslant$$
$$-a_1(x_2\cdot 0+\cdots+x_n\cdot 0)=0$$

证毕.

证法3 有许多同学试图用数学归纳法来证明本题,遗憾的是,只有个别同学是正确的.

本题是可以通过数学归纳法来解的,其中的一种证法如下.

$n=2$ 时是很容易证明的,这时 $x_1=1-x_2,x_2=1-x_1$,故有

$$a_1x_1(1-x_1)+a_2x_2(1-x_2)=a_1x_1x_2+a_2x_1x_2=(a_1+a_2)x_1x_2$$

它显然不是负数.

设 $n=k$ 时命题成立.

当 $x_1+x_2+\cdots+x_k+x_{k+1}=1$ 时,若 $x_{k+1}=1$,那么只能是 $x_1=x_2=\cdots=x_k=0$,不等式成为 $a_{k+1}\geqslant a_{k+1}$,这是合理的,故设 $0\leqslant x_{k+1}<1$,这时

$$\frac{x_1}{1-x_{k+1}}+\frac{x_2}{1-x_{k+1}}+\cdots+\frac{x_k}{1-x_{k+1}}=1$$

依归纳假设有

$$\sum_{i=1}^{k}a_i\frac{x_i}{1-x_{k+1}}\geqslant\sum_{i=1}^{k}a_i\left(\frac{x_i}{1-x_{k+1}}\right)^2$$

(这里及以后,均设想读者掌握了求和记号 $\sum$ 的意义和性质).由上式可得

$$(1-x_{k+1})\sum_{i=1}^{k}a_ix_i \geqslant \sum_{i=1}^{k}a_ix_i^2$$

即
$$\sum_{i=1}^{k}a_ix_i \geqslant \sum_{i=1}^{k}a_ix_i^2 + x_{k+1}\sum_{i=1}^{k}a_ix_i$$

将 $a_{k+1}x_{k+1}$ 同时加到上式两边，得

$$\sum_{i=1}^{k+1}a_ix_i \geqslant \sum_{i=1}^{k+1}a_ix_i^2 + x_{k+1}\sum_{i=1}^{k}a_ix_i + a_{k+1}x_{k+1} - a_{k+1}x_{k+1}^2$$

让我们看

$$x_{k+1}\sum_{i=1}^{k}a_ix_i + a_{k+1}x_{k+1} - a_{k+1}x_{k+1}^2 =$$

$$x_{k+1}\sum_{i=1}^{k}a_ix_i + a_{k+1}x_{k+1}(1-x_{k+1}) =$$

$$x_{k+1}\sum_{i=1}^{k}a_ix_i + a_{k+1}x_{k+1}(x_1+x_2+\cdots+x_k) =$$

$$x_{k+1}\sum_{i=1}^{k}(a_i+a_{k+1})x_i \geqslant 0$$

因此就证得了

$$\sum_{i=1}^{k+1}a_ix_i \geqslant \sum_{i=1}^{k+1}a_ix_i^2$$

这样就完成了归纳法证明.

2 在 $\triangle ABC$ 中，BC 边上的高 $AD=12$，$\angle A$ 的平分线 $AE=13$. 设 BC 边上的中线 $AF=m$，问 m 在什么范围内取值时，$\angle A$ 分别为锐角、直角、钝角.

解 这是一个比较接近于课本内容的平面几何题目. 证明本题也有多种方法. 这些证法大体上又可以分两类，一类是通过代数的或三角的计算，另一类侧重于纯几何的方法. 以下，我们给出两个解法.

解法1 首先，由勾股定理，得出

$ED=\sqrt{AE^2-AD^2}=\sqrt{13^2-12^2}=\sqrt{(13-12)(13+12)}=5$

可见，不论 $\triangle ABC$ 怎样变化，$\text{Rt}\triangle AED$ 总是固定的，用字母 α 来记 $\angle EAD$，于是 $\tan\alpha=5/12$.

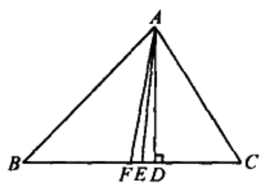


图1

令 $\beta=\angle BAE=\angle CAE$，故有

$$\angle BAD=\beta+\alpha, \angle CAD=\beta-\alpha$$

从而
$$BD=AD\tan(\beta+\alpha)=12\tan(\beta+\alpha)$$
$$CD=AD\tan(\beta-\alpha)=12\tan(\beta-\alpha)$$

由 $BD=BF\pm FD$，$CD=CF\mp FD$ 及 $BF=CF$，有

$$FD = \frac{1}{2}\mid BD - CD \mid = 6\mid \tan(\beta + \alpha) - \tan(\beta - \alpha)\mid =$$

$$6\left|\frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} - \frac{\tan\beta - \tan\alpha}{1 + \tan\beta\tan\alpha}\right| =$$

$$6\left|\frac{2\tan\alpha(1 + \tan^2\beta)}{1 - \tan^2\alpha\tan^2\beta}\right| = 5\frac{1 + \tan^2\beta}{\left|1 - (\frac{5}{12})^2\tan^2\beta\right|} =$$

$$5\frac{1 + \tan^2\beta}{1 - (\frac{5}{12})^2\tan^2\beta}$$

以下分三种情形讨论.

i 当$\angle A$为锐角时,$0 < \beta < \frac{\pi}{4}$,$0 < \tan^2\beta < 1$.这时$5 < FD < \frac{1\,440}{119}$,因为$m = AF = \sqrt{AD^2 + DF^2} = \sqrt{144 + DF^2}$,所以这时$13 < m < 2\,028/119$.

ii 当$\angle A$为直角时,$\beta = \frac{\pi}{4}$,这时$m = 2\,028/119$.

iii 当$\angle A$为钝角时,这时有$\frac{\pi}{4} < \beta < \frac{\pi}{2} - \alpha$,这不等式后一部分是因为必须有$\alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$.这时

$$1 < \tan^2\beta < \tan^2(\frac{\pi}{2} - \alpha) < (\frac{12}{5})^2$$

因此$\frac{1\,440}{119} < DF < +\infty$,从而$\frac{2\,028}{119} < m < +\infty$.

容易看出,m的值与$\angle A$的大小有着一一对应的关系,因此我们得出结论:

当$m \in (13, \frac{2\,028}{119})$时,$\angle A$为锐角;

当$m = 2\,028/119$时,$\angle A$为直角;

当$m \in (\frac{2\,028}{119}, +\infty)$时,$\angle A$为钝角.

解法2 作$\triangle ABC$的外接圆.过BC的中点F作BC的垂直平分线,交外接圆于G.容易得出,当$\angle A$为锐角时(图2),$AF > FG$;当$\angle A$为直角时,$AF = FG$;当$\angle A$为钝角时,$AF < FG$.

由于AE为$\angle BAC$的平分线,所以AE的延长线一定通过点G.

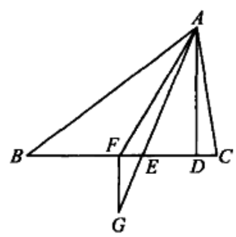


图2

于是

$$\frac{FG}{FE} = \frac{AD}{ED} = \frac{12}{5}$$

由此得$FG = \frac{12}{5}FE$.但是

$$AF^2 = AD^2 + DF^2 = 12^2 + (FE + 5)^2$$

即 $$FE = \sqrt{m^2 - 12^2} - 5$$

于是 $$FG = \frac{12}{5}(\sqrt{m^2 - 12^2} - 5)$$

不等式 $FG < m$ 相当于

$$\sqrt{m^2 - 12^2} - 5 < \frac{5}{12}m$$

去掉根号并化简之后,得到不等式

$$m^2 - \frac{600}{119}m - \frac{(12 \times 13)^2}{119} < 0$$

解上述不等式得到

$$-12 < m < \frac{2\,028}{119}$$

m 当然不能取负值.不但如此,仔细观察几何图形,$m = 13$ 都是不可能的,否则将导致 $12 = 13$.所以当 $\angle A$ 为锐角时,只能是 $13 < m < 2\,028/119$.其他情形,亦如解法 1 所列出的结果.

3 设 $Z_1, Z_2, \cdots, Z_n$ 为复数,满足 $|Z_1| + |Z_2| + \cdots + |Z_n| = 1$,求证:上述 n 个复数中,必存在若干个复数,它们的和的模不小于 1/6.

证明 本题是由美国的一本高等数学书中的一个引理改造而成的.事实上,题中的常数可以增大到 1/4.

冬令营的一位营员(来自江苏)给出了一个很简洁的解法,这一解法,是基于以下的考虑.

设 $Z_1 = 3 - 2i, Z_2 = -3 + 2i$,那么 $|Z_1 + Z_2| = 0$.而如果 $Z_1 = 3 - 2i, Z_2 = 3 + 1.9i$,那么 $|Z_1 + Z_2| = |6 - 0.1i| \geqslant 6$.这两个例子表明,若干个复数相加,只有当它们的实部或虚部具有相同的符号时,和的模才可能比较大;否则正负相抵,和的模就可能相对较小.

令 $Z_k = x_k + iy_k, k = 1, 2, \cdots, n$.由于

$$|Z_k| \leqslant |x_k| + |y_k|$$

故得 $$1 = \sum_{k=1}^{n} |Z_k| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |x_k| + \sum_{k=1}^{n} |y_k|$$

因为我们有显然的等式

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k| = \sum_{x_k > 0} x_k - \sum_{x_k < 0} x_k$$

$$\sum_{k=1}^{n} |y_k| = \sum_{y_k > 0} y_k - \sum_{y_k < 0} y_k$$

这里,$\sum\limits_{x_k > 0} x_k$ 表示把 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 中全部正数都加起来,而 $\sum\limits_{y_k < 0} y_k$ 表

示把 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 中全部负数加起来. 由于

$$\sum_{x_k>0}x_k+(-\sum_{x_k<0}x_k)+\sum_{y_k>0}y_k+(-\sum_{y_k<0}y_k)\geqslant 1$$

故以上四个和式中必有一个不小于$\frac{1}{4}$,无妨设

$$-\sum_{y_k<0}y_k=\sum_{y_k<0}|y_k|\geqslant\frac{1}{4}$$

这时

$$\left|\sum_{y_k<0}Z_k\right|=\left|\sum_{y_k<0}x_k+\mathrm{i}\sum_{y_k<0}y_k\right|\geqslant\left|\sum_{y_k<0}y_k\right|=\sum_{y_k<0}|y_k|\geqslant\frac{1}{4}$$

在上式中,记号 $\sum\limits_{y_k<0}Z_k$ 表示把复数 $Z_1,Z_2,\cdots,Z_n$ 中具有负虚部的那一部分复数加起来.

其实常数$\frac{1}{4}$ 还可以更大一些,运用高等数学中的工具,可以证明,本题中的常数$\frac{1}{6}$ 可以用$\frac{1}{\pi}$ 来代替,这里 π 代表圆周率.

4 已知四边形 $P_1P_2P_3P_4$ 的四个顶点位于 $\triangle ABC$ 的边上,求证: 四个三角形 $\triangle P_1P_2P_3,\triangle P_1P_2P_4,\triangle P_1P_3P_4,\triangle P_2P_3P_4$ 中,至少有一个的面积不大于 $\triangle ABC$ 面积的四分之一.

证明 为简便起见,我们直接用 $\triangle ABC$ 来代表 $\triangle ABC$ 的面积,其余类似的记号,均有此含义.

要考虑两种情况:

i $\triangle ABC$ 中,有一边上不含 P_1,P_2,P_3,P_4 中的任何一点,如图1所示;

ii $\triangle ABC$ 的每一条边上均有 P_1,P_2,P_3,P_4 中的点,当然至少有一条边,例如 BC 边上,含有其中的两个点,如图2所示.

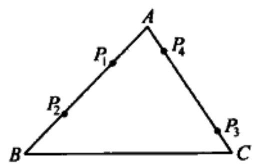


图 1

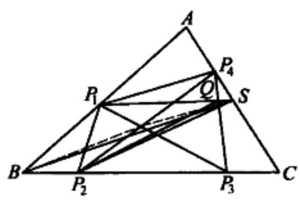


图 2

先讨论后一种情形. 设 P_4 到 BC 的距离大于等于P_1 到 BC 的距离,联结 P_1P_4 及 P_4P_3. 过 P_1 作平行于 BC 的直线段,分别交 P_4P_3, AC 于 Q 及 S 两点. 对于同底三角形 $\triangle P_4P_1P_2,\triangle QP_1P_2$, $\triangle P_3P_1P_2$,我们有

$$\min(\triangle P_4P_1P_2,\triangle P_3P_1P_2)\leqslant\triangle QP_1P_2\leqslant\triangle SP_1P_2$$

由于 $\triangle P_2SP_1$ 与 $\triangle BSP_1$ 同底等高,故得

$$\min(\triangle P_4P_1P_2,\triangle P_3P_1P_2)\leqslant\triangle BSP_1$$

把 $\triangle BSP_1$ 放在 $\triangle BSA$ 中考察,若设 $BP_1:BA=x$,那么

$$\triangle BSP_1=x\triangle BSA$$

再把 $\triangle BSA$ 放在 $\triangle ABC$ 中来看,由于 $AS:AC=1-x$,所以

$$\triangle BSP_1 = x\triangle BSA = x(1-x)\triangle ABC$$

当 $0 < x < 1$ 时，$x(1-x) \leqslant (\frac{x+(1-x)}{2})^2 = \frac{1}{4}$，所以有

$$\min(\triangle P_4P_1P_2, \triangle P_3P_1P_2) \leqslant \frac{1}{4}\triangle ABC$$

再来讨论图1所示情形，联结 P_2P_3，利用前面已证明过的情形，四个小三角形中必有一个小于等于$\frac{1}{4}\triangle AP_2P_3$，但因$\triangle AP_2P_3 < \triangle ABC$，结论仍然正确. 在竞赛中，不少同学恰恰是忽略了这一种情况.

5 能否把1,1,2,2,3,3,…,1 986,1 986这些数重新排成一行，使得两个1之间夹着一个数，两个2之间夹着两个数，…，两个1 986之间夹着一千九百八十六个数？请证明你的结论.

证明 为了使结果更一般些，我们考虑 $1,1,2,2,\cdots,n-1,n-1,n,n$，这 $2n$ 个数的重排的可能性问题，要求还是：两个 k 之间夹着 k 个数，这里 k 取 $1,2,\cdots,n-1,n$ 中的每一个值.

以下给出三种证法. 这一种证法多少带有高等数学的色彩，主要的思想与 n 阶行列式的理论基础 —— 置换 —— 有些关系；第二种证法简单一些，只涉及前若干个自然数的求和公式，这是高中数学课本中的内容；第三种证法几乎不需要多少知识，但体现着巧妙的思考，这一证法，是参加冬令营的一位上海女同学的答卷.

证法1 对于 $1,1,2,2,\cdots,n,n$ 的任一排列，用一个大写字母，例如 P 来表示. 设想对于某一确定的排列 P，在其中，两个 k 之间夹着 R_k 个数，这里 $k=1,2,\cdots,n$，定义

$$R(P) = R_1 + R_2 + \cdots + R_n$$

它是一个非负整数，我们称 $R(P)$ 为排列 P 的"指数".

现在，对调 P 中的某相邻两个数，例如 i,j，无妨设 $i \neq j$，其余的数均保留在原来的位置上，得出了一个新的排列 Q. 我们来看两个指数 $R(P)$ 与 $R(Q)$ 之间的关系.

设

$$P = \boxed{\cdots}\boxed{i}\boxed{\cdots}\boxed{i}\boxed{j}\boxed{\cdots}\boxed{j}\boxed{\cdots}$$

故

$$Q = \boxed{\cdots}\boxed{i}\boxed{\cdots}\boxed{j}\boxed{i}\boxed{\cdots}\boxed{j}\boxed{\cdots}$$

设在 P 中两个 i 之间夹着 R_i 个数，两个 j 之间夹着 R_j 个数，显然，

在 Q 中,两个 i 之间夹着 R_i+1 个数,而两个 j 之间夹着 R_j+1 个数.由于其他各对数的位置没有变化,因此 $R(Q)=R(P)+2$.此式也可写为 $R(P)=R(Q)-2$.

再设

$$P=\boxed{\cdots|j|\cdots|i|\cdots|i|j|\cdots}$$

故

$$Q=\boxed{\cdots|j|\cdots|i|\cdots|j|i|\cdots}$$

在排列 Q 中,显然两个 i 之间夹的数的个数为 R_i+1,两个 j 之间夹的数的个数为 R_j-1,由此可知 $R(Q)=R(P)$.

所以,不论 P 为怎样一个排列,如果只对换 P 中相邻的两数,保持其余的各数不变,得出的排列为 Q,那么必有 $R(P)=R(Q)\pm 2$.这就是说,这样的两个排列 P 与 Q,其指数具有相同的奇偶性.

经过有限次的相邻两数之间的对换,任一排列 P 总可以变为排列

$$P_0=\boxed{1|1|2|2|3|3|\cdots|n|n}$$

显然 $R(P_0)=0+0+\cdots+0=0$,结合上述推理可知:$1,1,2,2,\cdots,n,n$ 的任一排列的指数只能为偶数.

今设所要求的排列存在,记为 P^*.这一排列的指数是

$$R(P^*)=1+2+\cdots+n=n(n+1)/2$$

按前面的说法,它应当为偶数,记为 $2t$,于是

$$n(n+1)=4t$$

这里 t 为正整数.当 n 为奇数时,4应整除 $n+1$,亦即 $n=4m+3$,这里 m 为非负整数,当 n 为偶数时,$n+1$ 为奇数,这时4必整除 n,所以 $n=4m$,这里 m 为某一正整数.

这就是说,如果具有所要求的性质的排列存在,那么必须有 $n\equiv 0$ 或 $3 \pmod 4$.

当 $n=1\,986$ 时,此数被4除之余2,不满足上述关系,因此,一定不能排成所要求的形式.

证法2 对一行上的 $2n$ 个位置,按从左到右的次序依次编上 $1,2,3,4,\cdots,2n-1,2n$ 号.对任一 $i\in\{1,2,\cdots,n-1,n\}$,设其中一 i 占据 a_i 号位,另一 i 占据 b_i 号位,无妨设 $a_i<b_i$.如果所要求的排列 P^* 存在,应有

此证法属于常庚哲教授

$$b_i-a_i=i+1,i=1,2,\cdots,n$$

由此得

$$a_i+b_i=2a_i+i+1$$

将上式双方求和

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)=\sum_{i=1}^{n}2a_i+\sum_{i=1}^{n}(i+1)$$

上式左方是一切位置号码之和,应等于

$$1+2+\cdots+2n=n(2n+1)$$

可是 $$\sum_{i=1}^{n}2a_i+\sum_{i=1}^{n}(i+1)=\text{偶数}+n+\frac{n(n+1)}{2}$$

因此,我们有

$$2n^2=\text{偶数}+\frac{n(n+1)}{2}$$

也可以说 $n(n+1)/2$ 为一偶数,达到了证法 1 所得的同样的结论.

证法 3 如果说前一证法中还要用到前若干个自然数之和的公式,那么当前这一证法更为初等,几乎不用任何特殊的知识.在证法 2 中,我们已经得到 $a_i+b_i=2a_i+i+1$,这也可以说成

$$a_i+b_i=\text{偶数}+i+1$$

仔细观察上式可知,若 i 为偶数时,a_i+b_i 等于奇数,这表明 a_i 与 b_i 奇偶性不同.也就是说,对于偶数 i,其中的一个被排在奇号位置上,另一个一定被排在偶号位置上.若 i 为奇数,则 a_i+b_i 等于偶数,即 a_i 与 b_i 有相同的奇偶性,那就是说,如果 a_i 是奇数,b_i 必为奇数.或者说,对于奇数 i,若有一个 i 出现在奇号位置上,那么另一 i 也将出现在奇号位置上.这表明,奇号位上的奇数的个数必为偶数个,设此数为 $2m$(m 为非负整数).但是,编号为奇数的位置有 n 个,而 $1,2,\cdots,n$ 中,偶数的个数为$[\frac{n}{2}]$,这里$[x]$表示不超过 x 的最大整数.这样,我们得出等式

$$n=[\frac{n}{2}]+2m$$

当 $n=1\ 986$ 时,上式变为 $1\ 986=993+2m$,由此可导出 993 是一偶数,是一矛盾.这个矛盾说明,所要求的排列不存在.

一般地,当 $n\equiv1,2 \pmod 4$ 时,代入 $n[n/2]+2m$ 都将产生同样的矛盾.而当 $n\equiv0,3 \pmod 4$ 时,都不会产生明显的矛盾.因此,这里得出的结论,同前面证法得出的结论是完全相同的.

条件 $n\equiv0,3 \pmod 4$ 对于所要求的排列的存在性是否也是充分的呢?国外有人已经作出了肯定的回答.

6 用任意的方式,给平面上的每一个点染上黑色或白色.求证:一定存在一个边长为 1 或$\sqrt{3}$ 的正三角形,它的三个顶点是同色的.

证明 这个题目来自罗马尼亚的一本《组合与图论问题集》.

在解这个问题的时候,许多同学都画了一个边长为 1 的正六边形,因为其中含有六个边长为 1 的正三角形以及两个边长为$\sqrt{3}$的正三角形(用虚线表示),用 · 与 * 来表示两种不同的颜色,得出图 1,但是,所有这些正三角形,三个顶点的颜色是不同的.有的同学做到这里,感到无法再进行下去,只好不了了之,半途而废.

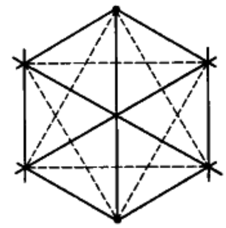


图 1

如果能看出,上述图形不能成功的一个主要原因是:任何距离为 2 的两点都是同色的.这就找到了症结之所在.

现在,设有两点 A,B,使$\overline{AB}=2$,而且 A,B 异色.如图 2 所示,取 A 与 B 连线的中点为 O,它一定与 A 或 B 同色.无妨设 A,O 同色,以 AO 为一边作两个正三角形,其他二顶点分别以 C,D 记之.若 C 与 D 中有一个与 A 同色,那么 $\triangle OAC$ 与 $\triangle OAD$ 都是边长为 1 的正三角形,而且其中有一个三角形三顶点同色,结论就证明了.因此,可设 C 与 D 所染颜色与 A 所染颜色不同,很明显,此时 $\triangle BCD$ 为一边长等于$\sqrt{3}$ 的正三角形,三顶点同色,命题得证.

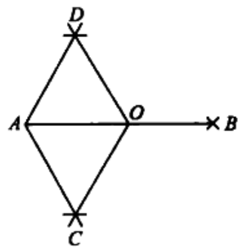


图 2

假如任何距离为 2 的两点都染了同样的颜色,我们可以证明,这时全平面每一点都染着相同的颜色.现在,如图 3 所示,任取平面上的二点 $A,B(A\neq B)$,用直线把 A,B 联结起来,从 A 出发,用步长 2 朝 B 前进,依次得到点 $A_1,A_2,A_3,\cdots$,它们与 A 同色.很明显,总可以找到一点 A_k,使$\overline{A_kB}\leqslant 2$,这时,以 A_kB 为底边作一腰长为 2 的等腰 $\triangle A_kCB$,依假设,这时 C 与 A_k 同色,B 与 C 同色,即 B 与 A 同色.这就证明了:在任何距离等于 2 的两点都同色的情形下,平面上任何二点有相同的染色,即每一点只被同一种颜色所染.这时,任何边长为 1 的正三角形的三顶点是同色的,结论也正确.

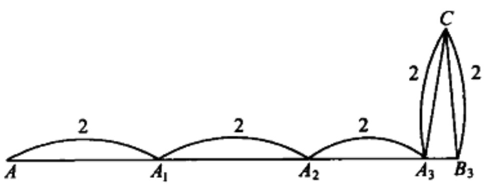


图 3

带有组合性质的题目都有这样的特征,必须无遗漏地考察各种可能的情况,在每一种情况下都要去证明结论的正确性.

解完题目之后,再对这些竞赛题作一些评论.正如同近年来国外的许多竞赛题一样,它们已越来越多地带有高等数学的色彩,有的是一个高级定理的特殊情况,有的以高等数学中的事实为背景.我们已经提到,第 1 题来自于科学研究,第 3 题与第 5 题来

自国外的高等数学专著.第5题虽然没有这种背景,但它的第一种证法中体现了一些中学数学课本中没有出现过的思想.第2题与第4题是两道几何题目,第2题离不开必要的计算,第4题则要求严密的、清晰的推理.第3题要求学生对复数的向量性质有很好的认识,最后一题是一个组合题目,考查学生是否能区别对待各种情况,并要求相当的灵活性.

每个题目都不是只有一个解法,这样就不至于把学生逼得束手无策,走投无路.第一试的平均成绩是32分,第二试的平均成绩是13.2分(这两试的满分各为60分),这也是正常的.这次竞赛,较圆满地完成了选拔集训队员的任务.集训队传来的信息是队员们的学习情况与他们在冬令营的这次竞赛中表现出来的成绩是相匹配的,这就证明了这次竞赛的命题工作是令人满意的.

第2届中国数学奥林匹克

北京,1987

1 设 n 为自然数.求证:方程

$$z^{n+1}-z^n-1=0$$

有模为1的复根的充分必要条件是 $n+2$ 可被6整除.

证明 设方程

$$z^{n+1}-z^n-1=0 \tag{*}$$

有根 z, $|z|=1$,则因 $z^n(z-1)=1$,两边取模得 $|z|^n|z-1|=1$,即 $|z-1|=1$.故 z 为圆 $|z|=1$ 和圆 $|z-1|=1$ 的交点(也可以说,z,0,1三点连成等边三角形),所以 $z=e^{\pm i\frac{\pi}{3}}$, $z^3=-1$, $z^6=1$,且 $z^k=1$ 当且仅当 k 被6整除.又因 $z^3=-1$,所以 $(z+1)(z^2-z+1)=0$,因 $z\neq-1$,所以 $z^2-z+1=0$, $z-1=z^2$,代入方程(*),便得 $z^{n+2}=1$,所以 $n+2$ 可被6整除.

反之,若 $n+2$ 可被6整除,令 $z=e^{\pm i\frac{\pi}{3}}$,易验证 $z-1=z^2$, $z^{n+2}=1$,代入方程(*)适合,而 $|z|=1$,便证得充分性.

2 把边长1的正 $\triangle ABC$ 的各边都 n 等份,过各分点作平行于其他两边的直线,将这三角形分成小三角形.各小三角形的顶点都称为结点.在每一结点上放置了一个实数.已知

(Ⅰ) A,B,C 三点上放置的数分别为 a,b,c;

(Ⅱ) 在每个由公共边的两个最小三角形组成的菱形之中,两组相对顶点上放置的数之和相等.

试求:

(1) 放置最大数的点与放置最小数的点之间的最短距离 r;

(2) 所有结点上的数的总和 S.

解 不失一般性,设 $a\leqslant b\leqslant c$.我们把性质(Ⅱ)称为"菱形性质".如图1所示,考虑同线相邻的三结点 D,E,F,它们上面放置的数为 d,e,f;再取与 D,E 相邻的结点 G,以及与 E,F 相邻的结点 H,它们上面放置的数为 g,h.根据"菱形性质"有 $g+e=d+h$, $g+f=e+h$,所以 $f-e=e-d$.这表明 D,E,F 上的数

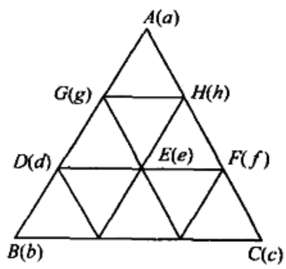


图1

成等差数列.

由等差数列的“传递性”易得同一直线的全部结点上的数成等差数列;由等差数列的“边界性”易知,若公差非0,则等差数列的最大(小)值出现在两端.所以:

(1)若 $a<b<c$,易见每条直线上的最大(小)数在两端,故点 C 放最大数 c,点 A 放最小数 a,$r=1$.若 $a=b<c$,同理可知点 C 放最大数 c,AB 直线上任一结点均放最小数 a,其中与 C 最接近的是 P,当 n 为偶数时,P 为 AB 的中点;当 n 为奇数时,P 为 AB 的第 $\frac{n-1}{2}$ 或 $\frac{n+1}{2}$ 个 n 等分点,对前者 $r=\frac{\sqrt{3}}{2}$,对后者 $r=\sqrt{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2+(\frac{1}{2n})^2}=\frac{1}{2n}\sqrt{3n^2+1}$.若 $a<b=c$,结果同上;若 $a=b=c$,则所有结点上放同一个数,同时为最大数和最小数,故 $r=0$,综合得

$$r=\begin{cases}1, a,b,c\text{ 全不相等}\\ \frac{\sqrt{3}}{2}, a,b,c\text{ 中有两者相等,且 } n\text{ 为偶数}\\ \frac{1}{2n}\sqrt{3n^2+1}, a,b,c\text{ 中有两者相等,且 } n\text{ 为奇数}\\ 0, a=b=c\end{cases}$$

(2)绕 $\triangle ABC$ 的中心把 $\triangle ABC$ 旋转 $120°$,$240°$,$360°$,把三次旋转所得的三个三角形叠合成一个 $\triangle A'B'C'$.$\triangle A'B'C'$ 的结点上放的数是叠合在同一结点的三数之和.则因等差数列具“可加性”(两个等差数列相加仍为等差数列),易知 $\triangle A'B'C'$ 上的每一直线的全部结点上的数仍成等差数列,但此时三顶点 A',B',C' 上放置的数均为 $a+b+c$,故所有结点上均放同一个数 $a+b+c$.$\triangle A'B'C'$ 的所有结点上的数的总和为 $3S=N(a+b+c)$,N 为结点总数,即

$$N=1+2+\cdots+(n+1)$$

所以 $$S=\frac{1}{6}(n+1)(n+2)(a+b+c)$$

3 某次体育比赛,每两名选手都进行一场比赛,每场比赛一定决出胜负.通过比赛确定优秀选手.选手 A 被确定为优秀选手的条件是:对任何其他选手 B,或者 A 胜 B;或者存在选手 C,C 胜 B,A 胜 C.

如果按上述规则确定的优秀选手只有一名,求证:这名选手胜所有其他的选手.

证法 1 为了叙述方便，约定：若 A 胜 C，C 胜 B，则称 A 间接胜 B.

(1) 先证按题设规则必存在优秀选手. 因选手人数有限，故必存在胜场次数最多的选手，设其中之一为 A. 若 A 胜其余选手，则 A 为优秀选手无疑；若 A 胜 $B_1, B_2, \cdots, B_k$，但败于 $B'_1, B'_2, \cdots, B'_r$（k, r 为正整数），则 B'_i（$i = 1, 2, \cdots, r$）必不能全胜 $B_1, B_2, \cdots, B_k$，否则 B'_i 至少胜 $k+1$ 场，比 A 胜场数还多，引出矛盾. 从而至少有一 B_j 胜 B'_i，因此 A 间接胜 B'_i（即 A 胜 B_j，B_j 胜 B'_i），按规则，A 为优秀选手.

(2) 再证若优秀选手唯一，则必全胜其他选手. 设 A 为唯一的优秀选手，若 A 胜 $B_1, B_2, \cdots, B_k$，但败于 $B'_1, B'_2, \cdots, B'_r$（k, r 为正整数），则由(1)知 $B'_1, B'_2, \cdots, B'_r$ 共 r 人中也有“局部的”优秀选手 B'_i，从而 B'_i 胜或间接胜 $B'_1, B'_2, \cdots, B'_r$ 中其余选手，并且 B'_i 胜 A，A 胜 $B_1, B_2, \cdots, B_k$，即 B'_i 胜或间接胜 $B_1, B_2, \cdots, B_k$，按规则，B'_i 也为优秀选手，与 A 的唯一性矛盾. 所以 A 全胜其他选手. 证毕.

证法 2 对人数 n 采用数学归纳法.

$n = 1, 2$ 时命题显然成立. 设命题对 n 人成立. 现在有 $n+1$ 人的集合 α，A 为 α 中唯一的优秀选手. 设 A 败于 B，α 去掉 B 后得到 n 人的集合 β，易见 A 仍为 β 中的优秀选手. 设 β 中另有一优秀选手 A'，则因 α 中优秀选手唯一，故 A' 不能胜 B，也不能间接胜 B. 设 β 中有选手 C 胜 B，则 C 胜 A'（否则 A' 间接胜 B，引出矛盾），但 A' 为 β 中的优秀选手，故有 D，A' 胜 D，D 胜 C；此 D 不能胜 B（否则 A' 间接胜 B，矛盾），从而 B 胜 D，D 胜 C. 所以 B 胜或间接胜 β 中全部选手，这样 B 也成为 α 中的优秀选手，引出矛盾. 此矛盾表明 A 亦为 β 中唯一的优秀选手，由归纳法假设，A 胜 β 中所有其他选手，但 B 胜 A，故 B 胜或间接胜 β 中全部选手，B 也为 α 中的优秀选手，引出矛盾. 所以 A 战胜 α 中其余全部选手. 故命题成立.

4 在一个面积为 1 的正三角形内部，任意放五个点. 试证：在此正三角形内，一定可以作三个正三角形盖住这五个点，这三个正三角形的各边分别平行于原三角形的边，并且它们的面积之和不超过 0.64.

证明 以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 记所作的三个正三角形，其面积记为 S_1，S_2，S_3. 因为所放五点均在原三角形（记为 $\triangle ABC$）的内部，故可以 $\triangle ABC$ 的中心为中心，在 $\triangle ABC$ 的内部作它的位似三角形

$\triangle A'B'C'$,使得所放五点仍在 $\triangle A'B'C'$ 内部. $\triangle A'B'C'$ 可认为是 $\triangle ABC$ 收缩而成. $\triangle A'B'C'$ 面积为 S, $S = 1 - e, 0 < e < 1$.

把 $\triangle A'B'C'$ 三边五等份,第 1,4 分点依次为 $D_1, D_2, E_1, E_2, F_1, F_2$,如图 1 所示,联结 D_1E_2, E_1F_2, F_1D_2,交于 L, M, N,分 $\triangle A'B'C'$ 为七部分,记为小三角形 π_0,菱形 π_1, π_2, π_3,梯形 π_4, π_5, π_6.

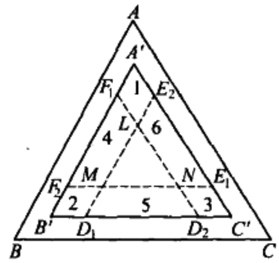


图 1

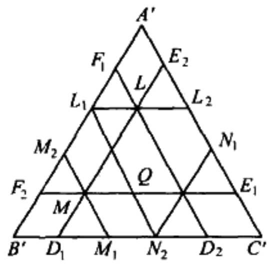


图 2

(1) 若有一菱形(如为 π_1)没放进点,则 $\pi_2 \cup \pi_4$ 与 $\pi_3 \cup \pi_6$ 中必有一区域(如为 $\pi_2 \cup \pi_4$)最多放进两点,显然可作 α_1, α_2 盖住这至多两个点,且其面积可任意适当选取,不妨使

$$S_1 = S_2 = \delta = \frac{1}{2}(\frac{4}{5})^2\varepsilon$$

令 α_3 为 $\triangle C'E_2D_1$,则 $S_3 = (\frac{4}{5})^2 S$,从而 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 满足要求(即盖住了五点,且三个正三角形的各边分别平行于原三角形的边),且

$$S_1 + S_2 + S_3 = (\frac{4}{5})^2\varepsilon + (\frac{4}{5})^2 S = (\frac{4}{5})^2 = 0.64$$

(2) 若每一菱形均放进点,而其余区域均没放进点,令 $\triangle A'B'C'$ 各边的第 2,3 分点依次为 $L_1, M_2, M_1, N_2, N_1, L_2$,如图 2 所示,则 $\triangle A'L_1L_2$, $\triangle B'M_1M_2$, $\triangle C'N_1N_2$ 可作为 α_2, α_3,显然满足要求,且

$$S_1 + S_2 + S_3 = 3(\frac{2}{5})^2 S < (\frac{4}{5})^2 S < (\frac{4}{5})^2 = 0.64$$

(3) 若每一菱形均放进点,而其余区域只放进一点 P,则不妨设 π_1 中放进 2 点,π_2, π_3 中各放进一点.

i P 落入 $\pi_4 \cup \pi_0 \cup \pi_6$ 中,则以 $\triangle A'F_2E_1$ 为 α_3,情况类似于(1),同理可证;

ii P 落入 π_5 中,不妨设落入 π_5 的左半部.设 MN 的中点为 Q,过 Q 作 AC 的平行线,交 $B'C'$ 于 N_2,交 $A'B'$ 于 L_1.显然可作 α_1 盖住 π_3 中的一点,使 $S_1 = \delta = (\frac{1}{5})^2 S$;令 α_2 为 $\triangle A'L_1L_2$, α_3 为 $\triangle B'N_2F$,则 α_2 盖住了 π_1 中的两点,α_3 盖住了 π_2 中的一点和点 P, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 符合要求,且

$$S_1 + S_2 + S_3 = \left((\frac{1}{5})^2 + (\frac{2}{5})^2 + (\frac{3}{5})^2\right) S <$$

$$(\frac{4}{5})^2 S < (\frac{4}{5})^2 = 0.64$$

(4) 若每一菱形均放进点,而其余区域也放进两点 P, Q,则 π_1, π_2, π_3 中各放进一点,而三个梯形中至少有一(如为 π_4)没放进点,则以 $\triangle C'D_1E_2$ 为 α_3,情况类似于(1),同理得证,证毕.

5 设 $A_1A_2A_3A_4$ 是一个四面体，S_1,S_2,S_3,S_4 分别是以 A_1，A_2，A_3，A_4 为球心的球，它们两两相切．如果存在一点 Q，以这点为球心可作一个半径为 r 的球与 S_1,S_2,S_3,S_4 都相切，还可作一个半径为 R 的球与四面体的各棱都相切．求证：这个四面体是正四面体．

证明 先证明一条引理．

引理 设有 $\triangle A_1A_2A_3$，S_1,S_2,S_3 分别是以 A_1,A_2,A_3 为圆心的圆，它们两两相切．如果存在一点 O，以这点为圆心可作一个半径为 r 的圆与 S_1,S_2,S_3 都相切，还可作一个半径为 R 的圆与 $\triangle A_1A_2A_3$ 的各边都相切，则 $\triangle A_1A_2A_3$ 为正三角形．

引理的证明 (1) 先设 S_1,S_2,S_3 两两外切．

i 若圆 $O(r)$ 与 S_1,S_2,S_3 均外切．如图 1 所示，设圆 $O(R)$ 为 $\triangle A_1A_2A_3$ 的内切圆，与 A_2A_3 切于 D．令圆 S_1,S_2,S_3 的半径分别为 r_1,r_2,r_3．若 $r(r+2r_2)>R^2$，则

$$A_2D=\sqrt{(r+r_2)^2-R^2}>r_2$$

从而 $A_3D<r_2$，推出 $r(r+2r_3)<R^2$；同理，由 $r(r+2r_3)<R^2$ 可推得 $r(r+2r_1)>R^2$，又可推得 $r(r+2r_2)<R^2$，引出矛盾．

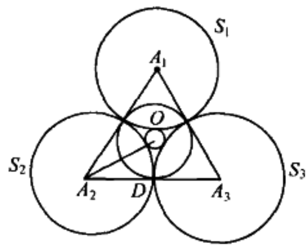


图 1

同理设 $r(r+2r_2)<R^2$ 也推出矛盾，所以 $r(r+2r_2)=R^2$，同理

$$r(r+2r_1)=r(r+2r_2)=r(r+2r_3)=R^2$$

推得 $r_1=r_2=r_3$，若记 a,b,c 为 $\triangle A_1A_2A_3$ 的三边，则有 $a=b=c$，$\triangle A_1A_2A_3$ 为正三角形．

ii 若圆 $O(r)$ 与 S_1,S_2,S_3 均内切，类似于 i，只须把 $r+2r_1,r+2r_2,r+2r_3$ 相应地改为 $r-2r_1,r-2r_2,r-2r_3$ 即可，仍可证得 $\triangle A_1A_2A_3$ 为正三角形(不考虑圆 $O(R)$ 为 $\triangle A_1A_2A_3$ 的旁切圆的情形)．

(2) 再设 S_1,S_2,S_3 中有一对外切，两对内切，则易证得点 O 必在 $\triangle A_1A_2A_3$ 外，不可能作圆 $O(R)$ 为 $\triangle A_1A_2A_3$ 的内切圆．易知 S_1,S_2,S_3 不可能再有其他情形，证毕．

下面证明原题．

(1) 先设 S_1,S_2,S_3,S_4 两两外切．用完全类似于引理证明中的(1) 的方法，可推得：对于 $\triangle A_1A_2A_3$，有 $A_1A_2=A_2A_3=A_3A_1$，$\triangle A_1A_2A_3$ 为正三角形；…；$\triangle A_2A_3A_4$ 为正三角形(亦即应用“圆幂定理”的推广“球幂定理”)．从而得四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 为正四面体．

(2) 再设 S_1,S_2,S_3,S_4 不两两外切，用类似于引理证明中的

(2) 的方法,也易知不可能作球 $O(R)$ 与六条棱 $A_1A_2,\cdots,A_3A_4$ 均相切.证毕.

6 m 个互不相同的正偶数与 n 个互不相同的正奇数的总和为 1 987,对于所有这样的 m 与 n,问 $3m+4n$ 的最大值是多少?请证明你的结论.

解 欲使 $s=3m+4n$ 尽可能大,须使作出 m 个偶数 $a_1,\cdots,a_m$ 和 n 个奇数 $b_1,\cdots,b_n$ 尽可能小,因此可考虑不等式

$$(2+4+\cdots+2m)+(1+3+\cdots+(2n-1))\leqslant 1\,987 \quad ①$$

式 ① 即

$$m(m+1)+n^2\leqslant 1\,987 \quad ②$$

式 ② 表示 mn 平面上的圆盘

$$(m+\frac{1}{2})^2+n^2\leqslant\frac{7\,949}{4} \quad ③$$

所有合条件的数对 (m,n),以此为坐标的点均落入圆盘 ③ 与第一象限(包括坐标轴)的公共范围,如图 1 所示.

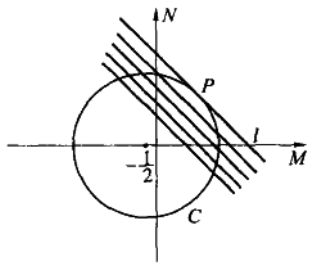


图 1

作一组平行直线:$3m+4n=s$(s 为正整数),所求 $3m+4n$ 的最大值应为使得直线 $3m+4n=s$ 与圆盘 ③ 有为整点的交点的 s 的最大值.

如不限制 s 为正整数,则使得平行直线组 $3m+4n=s$ 与圆盘 ③ 有交点的 s 的最大值,出现在 $3m+4n=s$ 为圆盘 ③ 的切线 l 的情况下,这时切点 $P(m,n)$ 满足

$$-\frac{3}{4}=-\frac{m+\frac{1}{2}}{n}\Rightarrow 3n=4m+2$$

代入 $$m(m+1)+n^2=1\,987$$

解得

$$m=\frac{3}{10}\sqrt{7\,949}-\frac{1}{2},n=\frac{2}{5}\sqrt{7\,949} \quad ④$$

$$s=3m+4n=\frac{5}{2}\sqrt{7\,949}-\frac{3}{2}$$

因为 $$89^2<7\,949<89.16^2$$

所以 $$221<s<221.4$$

考虑到 s 为正整数,便有 s 的最大值小于等于 221.把直线 l 平行地左移,碰到第一个格点 $Q(m,n)$(在圆盘 ③ 中),则 $s=3m+4n$ 便为最大值.由于 n 显然为奇数,所以应改述为"碰到第一满足 n 为奇数的格点 $Q(m,n)$",这个格点的纵坐标 n 应尽可能接近 $\frac{2}{5}\sqrt{7\,949}=35.6\cdots$,故可考虑 $n=35$ 或 $n=37$.前者使得 $m(m+$

1) $\leqslant 1\ 987 - n^2 = 762$, m 的最大值为 27, s 的最大值为 221;后者可同样计算得 s 的最大值为 220,故应取前者.实际构造可取(并非唯一)

$$a_1 = 2, a_2 = 4, \cdots, a_{26} = 52, a_{27} = 60$$

$$m = 27, b_1 = 1, b_2 = 3, \cdots, b_{35} = 69$$

$$n = 35$$

则得 $$a_1 + a_2 + \cdots + a_{27} + b_1 + \cdots + b_{35} = 1\ 987$$

同理 $s = 3m + 4n = 221$ 取最大值.

第3届中国数学奥林匹克

上海,1988

1 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是给定的不全为0的实数,$r_1,r_2,\cdots,r_n$ 是实数,如果不等式

$$r_1(x_1-a_1)+r_2(x_2-a_2)+\cdots+r_n(x_n-a_n)\leqslant \sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}-\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}$$

对任何实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 成立,求 $r_1,r_2,\cdots,r_n$ 的值.

解 由假设,对任何实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 成立不等式

$$r_1(x_1-a_1)+r_2(x_2-a_2)+\cdots+r_n(x_n-a_n)\leqslant \sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}-\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2} \quad ①$$

在式①中令 $x_k=2a_k$ 及 $x_k=0(k=1,2,\cdots,n)$,则得

$$r_1a_1+r_2a_2+\cdots+r_na_n\leqslant\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2} \quad ②$$

$$r_1a_1+r_2a_2+\cdots+r_na_n\geqslant\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2} \quad ③$$

所以 $$r_1a_1+r_2a_2+\cdots+r_na_n=\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}$$

从而不等式①变成

$$r_1x_1+r_2x_2+\cdots+r_nx_n\leqslant\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2} \quad ④$$

由式④及柯西不等式

$$r_1a_1+r_2a_2+r_3a_3+\cdots+r_na_n\leqslant \sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}\cdot\sqrt{r_1^2+r_2^2+\cdots+r_n^2}$$

即知 $1\leqslant\sqrt{r_1^2+r_2^2+\cdots+r_n^2}$. 又因式④对任何实数 $x_1,\cdots,x_n$ 成立,令 $x_k=r_k(k=1,2,\cdots,n)$,就有 $\sqrt{r_1^2+r_2^2+\cdots+r_n^2}\leqslant 1$,于是 $r_1^2+r_2^2+\cdots+r_n^2=1$.

由上所证结论,可知

$$r_1a_1+r_2a_2+\cdots+r_na_n=\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}=\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}\cdot\sqrt{r_1^2+r_2^2+\cdots+r_n^2}$$

由于柯西不等式恰好成为等式. 所以有实数 t 使得 $r_k=ta_k(k=$

$1,2,\cdots,n)$. 所以

$$ta_1^2+ta_2^2+\cdots+ta_n^2=\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}$$

解得

$$t=\frac{1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}}$$

因此

$$r_k=\frac{a_k}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}},k=1,2,\cdots,n$$

注:本题关键是由不等式 ① 对任何实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 成立即可得出不等式 ④ 对任何实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 成立以及等式 $r_1a_1+r_2a_2+\cdots+r_na_n=\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}$. 而作为题目的要求,并不需要验证这样的 $r_1,r_2,\cdots,r_n$ 确定可保证不等式 ① 成立.

2 设 C_1,C_2 是同心圆,C_2 的半径是 C_1 半径的 2 倍. 四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 内接于 C_1,将 A_4A_1 延长交圆 C_2 于 B_1,A_1A_2 延长交圆 C_2 于 B_2,A_2A_3 延长交圆 C_2 于 B_3,A_3A_4 延长交圆 C_2 于 B_4. 试证:四边形 $B_1B_2B_3B_4$ 的周长大于等于 $2\times$ 四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 的周长. 并请确定等号成立的条件.

解 如图 1,记两同心圆的圆心为 P,联结 PA_3 及 PB_4,由托勒密定理

$$\overline{PB_3}\cdot\overline{A_3B_4}\leqslant\overline{PA_3}\cdot\overline{B_3B_4}+\overline{A_3B_3}\cdot\overline{PB_4}$$

因为

$$PB_4=2PA_3,A_3B_4=A_3A_4+A_4B_4$$

所以

$$2(\overline{A_3A_4}+\overline{A_4B_4})\leqslant\overline{B_3B_4}+2\overline{A_3B_3} \quad ①$$

类似地可得另三个不等式(把下标 3,4 换成 4,1;1,2 及 2,3). 这四个不等式相加,即得

$$2(\overline{A_1A_2}+\overline{A_2A_3}+\overline{A_3A_4}+\overline{A_4A_1})\leqslant\overline{B_1B_2}+\overline{B_2B_3}+\overline{B_3B_4}+\overline{B_4B_1}$$

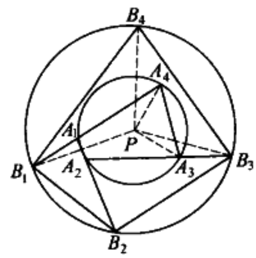


图 1

要使不等式 ① 及类似的另三个不等式都成为等式,由托勒密定理,式 ① 成立等式的充分必要条件是 P,A_3,B_3,B_4 这四点共圆,从而 $\angle PA_3A_2=\angle PB_4B_3=\angle PB_3B_4=\angle PA_3B_4$,所以 $\overline{A_2A_3}=\overline{A_3A_4}$. 同理,$P,A_4,B_4,B_1$ 四点共圆可得 $\overline{A_4A_3}=\overline{A_4A_1}$,以及 $\overline{A_1A_2}=\overline{A_2A_3}$. 所以 $A_1A_2A_3A_4$ 是正方形.

反之,如果 $A_1A_2A_3A_4$ 是正方形,$\angle PA_3A_2=\angle PA_3A_4$,用同一法即知 P,A_3,B_3,B_4 共圆. 从而式 ① 成为等式. 同理,另三个也成为等式. 从而

$$\overline{B_1B_2}+\overline{B_2B_3}+\overline{B_3B_4}+\overline{B_4B_1}=2(\overline{A_1A_2}+\overline{A_2A_3}+\overline{A_3A_4}+\overline{A_4A_1})$$

注 本题中的四边形可改成 n 边形,两同心圆半径之比 $\frac{\overline{PB_1}}{\overline{PA_1}}$

如为 k,结论仅相应改变为 $k(\overline{A_1A_2}+\cdots+\overline{A_nA_1})\leqslant\overline{B_1B_2}+\cdots+\overline{B_nB_1}$.而不等式成立等号的充分必要条件是 $A_1A_2\cdots A_n$ 是正 n 边形.

3 在有限项的实数列 $a_1,a_2,\cdots,a_n(*)$ 中,如果有一段数 $a_k,\cdots,a_{k+l-1}$ 的算术平均数大于 1 988,那么我们把这段数叫做一条"龙",并把 a_k 称为这条龙的"龙头"(如果某一项 $a_m>$ 1 988,那么单独这一项也是龙).

假定$(*)$中至少存在一条龙,证明:$(*)$中全体可以作为龙头的项的算术平均数也必定大于 1 988.

证明 在有限项的实数列 $a_1,a_2,\cdots,a_n(*)$ 中,一个项 a_k $(2\leqslant k\leqslant n)$ 是否可以作为龙头,是与在它之前的项 $a_1,\cdots,a_{k-1}$ 无关的.如果 $a_k(1\leqslant k\leqslant n)$ 可以作为龙头,把以 a_k 为龙头的项数最少的龙称为以 a_k 为龙头的最短龙.设 a_k 是可以作为龙头的项,而 $a_k,a_{k+1},\cdots,a_{k+i}$ 是以 a_k 为龙头的最短龙,于是当 $0\leqslant i\leqslant l$ 时,$a_{k+i},a_{k+i+1},\cdots,a_{k+l}$ 必定是龙,因为由最短龙的意义,$a_k,\cdots,a_{k+i-1}$ 不是龙,由 $a_k,a_{k+1},\cdots,a_{k+i-1}$ 的算术平均数小于等于 1 998 及 $a_k,a_{k+1},\cdots,a_{k+l}$ 的算术平均数大于 1 988,易见 $a_{k+i},\cdots,a_{k+l}$ 的算术平均数必大于 1 988($i=0$ 的情况显然,所以仅只须考虑 $l>0$ 的情况).由此,最短龙中的每一项都可以作为龙头.记所给数列$(*)$中可以作为龙头的第一项为 a_{k_1},以 a_{k_1} 为龙头的最短龙为 $a_{k_1}+a_{k_1+1},\cdots,a_{k_1+l_1}$,如果从第 k_1+l_1+1 起的各项中,还有可以作为龙头的项,把在 k_1+l_1+1 起的可以作为龙头的最前项记为 a_{k_2},并设以 x_{k_2} 为龙头最短龙为 $a_{k_2},\cdots,a_{k_2+l_2}$,然后再看在 k_2+l_2+1 起的各项中是否再有可以作为龙头的项(即在 $a_{k_2+l_2+1},a_{k_2+l_2+2},\cdots,a_n$ 中是否有龙),由于总项数是有限的,在若干次之后再不会有龙.这样,设总共得到了 j 条最短龙 $a_{k_1},\cdots,a_{k_1+l_1}$;$a_{k_2},\cdots,a_{k_2+l_2}$;$\cdots$;$a_{k_j},\cdots,a_{k_j+l_j}$;由这些龙的取法,$(*)$中可以作为龙头的项恰是这 j 条龙中的项.由于 $a_{k_1},\cdots,a_{k_1+l_1}$ 的算术平均数大于 1 988,$a_{k_2},\cdots,a_{k_2+l_2}$ 的算术平均数大于 1 988,$\cdots$,$a_{k_j},\cdots,a_{k_j+l_j}$ 的算术平均数大于 1 988,所以所有这些项的算术平均数大于 1 988.即$(*)$中可以作为龙头的项的算术平均数大于 1 988.

注 本题要点是可以作为龙头的项能分成为无公共项的若干条龙.在用归纳法(对$(*)$中项数作归纳)证明时,亦应注意这一点.

4 (1) 设三个正实数 a,b,c 满足 $(a^2+b^2+c^2)^2>2(a^4+b^4+c^4)$.求证:$a,b,c$ 一定是某个三角形的三条边长.

(2) 设 n 个正实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 满足不等式

$$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)^2>$$
$$(n-1)(a_1^4+a_2^4+\cdots+a_n^4),n\geqslant 3$$

求证:这些数中的任何三个一定是某个三角形的三条边长.

证明 (1) 由假设

$$(a^2+b^2+c^2)^2-2(a^4+b^4+c^4)>0$$

即 $$(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(b+c-a)>0$$

由于 a,b,c 都是正实数,上面不等式的左面至少有三项是正的,由于四项之积为正,故这四项都是正的,从而

$$a+b>c,a+c>b,b+c>a$$

所以 a,b,c 必是某三角形的三条边长.

(2) 对 n 用归纳法.$n=3$ 时即为(1)中结论.设当 $n=k$ 时结论成立,现设 $k+1$ 个正数 $a_1,a_2,\cdots,a_{k+1}$ 满足不等式

$$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{k+1}^2)^2>k(a_1^4+a_2^4+\cdots+a_{k+1}^4)$$

令 $$A=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_k^2$$
$$B=a_1^4+a_2^4+\cdots+a_k^4$$

则 $$(A+a_{k+1}^2)^2>k(B+a_{k+1}^4)$$

即 $$A^2+2Aa_{k+1}^2+a_{k+1}^4>k(B+a_{k+1}^4)$$

所以 $$A^2-(k-1)B+2Aa_{k+1}^2>B+(k-1)a_{k+1}^4$$

从而 $$A^2-(k-1)B+2Aa_{k+1}^2>2\sqrt{B}\sqrt{k-1}\cdot a_{k+1}^2$$
$$(A-\sqrt{k-1}\sqrt{B})(A+\sqrt{k-1}\sqrt{B}+2a_{k+1}^2)>0$$

也即有 $$A>\sqrt{k-1}\sqrt{B}$$
$$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_k^2)^2>(k-1)(a_1^4+a_2^4+\cdots+a_k^4)$$

由归纳假设,$a_1,a_2,\cdots,a_k$ 中任三个都必是某三角形的三边长.

由 $a_1,a_2,\cdots,a_{k+1}$ 的对称性,令 $A_j=a_1^2+\cdots+a_{k+1}^2-a_j^2$,$B_j=a_1^4+\cdots+a_{k+1}^4-a_j^4(1\leqslant j\leqslant k+1)$,类似地可知 $a_1,\cdots,a_{j-1},a_{j+1},\cdots,a_{k+1}$ 中任三个都必是某三角形的三边长.

5 给出三个四面体 $A_iB_iC_iD_i(i=1,2,3)$,过点 B_i,C_i,D_i 作平面 $\alpha_i,\beta_i,\gamma_i(i=1,2,3)$,分别与棱 A_iB_i,A_iC_i,A_iD_i 垂直$(i=1,2,3)$.如果九个平面 $\alpha_i,\beta_i,\gamma_i(i=1,2,3)$ 相交于一点 E,而三点 A_1,A_2,A_3 在同一直线 l 上,求三个四面体的外接球面的交集.(形状怎样?位置如何?)

解 先对一个四面体来讨论. 设 $ABCD$ 是四面体,作 $ABCD$ 的外接球,过 A 作外接球的直径 AP(P 为联结 A 与外接球心 O 的线段延长后与外接球面的交点),由于 AP 是外接球的直径,B,C,D 都在球面上,因此 $\angle ABP=\angle ACP=\angle ADP=\frac{\pi}{2}$. 因此知道点 P 在过点 B 所作的与 AB 垂直的平面上,也在过 C 所作的与 AC 垂直的平面上,也在过 D 所作的与 AD 垂直的平面上(这里,点 P 也可能与 B,C,D 中某一点重合,但下面的结论依然正确). 从而,过 B,C,D 分别作棱 AB,AC,AD 的垂直平面,这三个平面的交点与 A 的连线即为 $ABCD$ 的外接球直径.

由上所述,三个四面体的外接球即为分别以 A_1E,A_2E,A_3E 为直径的球. 由于 A_1,A_2,A_3 在同一直线上,本题的结论与 A_1,A_2,A_3 所在的直线 l 及点 E 的位置有关.

(1) 如果 A_1,A_2,A_3 重合,三个外接球重合,而三个外接球面的交集是个球面.

(2) 如果 A_1,A_2,A_3 不全重合(这时 l 是唯一确定的),而 E 也在直线 l 上,这时三个外接球面的交集仅为一点(即点 E). 这包括了 A_1,A_2,A_3 中有两点重合情况.

(3) 如果 A_1,A_2,A_3 不全重合,且 E 不在 l 上,这时,过 E 作 l 的垂线,垂足记为 Q,则三外接球面的交集是以 EQ 为直径的一个圆,此圆在过 Q 作的与 l 垂直的平面上.

注 本题主要是搞清楚外接球的情况,其余已基本上成为平面上的问题,另外要避免误以为交集会是两个点的情况. 讨论中容易忽视了 A_1,A_2,A_3 都重合的情况.

6 如 n 是不小于3的自然数,以 $f(n)$ 表示不是 n 的因数的最小自然数(例如 $f(12)=5$). 如果 $f(n)\geqslant 3$, 又可作 $f(f(n))$. 类似地,如果 $f(f(n))\geqslant 3$,又可作 $f(f(f(n)))$ 等. 如果 $\underbrace{f(f(\cdots f}_{k个f}(n)\cdots))=2$,就把 k 叫做 n 的"长度".

如果用 l_n 表示 n 的长度,试对任意的自然数 $n(n\geqslant 3)$ 求 l_n,并证明你的结论.

解 由假设,$f(n)$ 表示不是 n 的因数的最小自然数. 先证明对任何 $n(n\geqslant 3)$,$f(n)$ 不会是两个互素的($\geqslant 2$ 的)数的乘积. 用反证法,设 $f(n)=p\cdot q$(其中 $p,q\geqslant 2,(p,q)=1$),由 f 的定义,p,q 都是 n 的因数,即 $p\mid n,q\mid n$,由 $(p,q)=1$,所以 $pq\mid n$,与 $f(n)=pq$ 矛盾. 由于 $f(n)$ 不会是两个互素的($\geqslant 2$ 的)数的乘积,因而 $f(n)$ 必为 p^k 形成的数,其中 p 是素数,k 是自然数(实际上,

f 的值域是这种形式上的数的全体). 由此, 对于 $n \geqslant 3$ 的自然数 n, 或者 $f(n)=2$(易见这当且仅当 n 为奇数时成立), 或者 $f(n)=2^k(k \geqslant 2)$, 这时 $f(f(n))=3$, 从而 n 的长度为 3, 此外 $f(n)=p^k$(p 是奇素数, $k \geqslant 1$), 这时 n 的长度为 2. 由此, n 的长度 l_n 由 n 的特性所决定:

$$l_n=\begin{cases}1, \text{当 } n \text{ 是奇数} \\ 3, \text{有大于 1 的自然数 } k, \text{使得对任何小于 } 2^k \text{ 的素数 } p \\ \quad \text{及满足 } p^j<2^k \text{ 的自然数 } j, p^j \mid n, \text{而且 } 2^k \nmid n \\ 2, \text{其他情况}\end{cases}$$

注 本题主要说明使 $l_n=3$ 的是怎样的 n, 也可用其他说法, 另一点则是说明 $l_n \leqslant 3$(对任何 $n \geqslant 3$).

第4届中国数学奥林匹克

合肥,1989

1 在半径为1的圆周上,任意给定两个点集 A,B,它们都由有限段互不相交的弧组成,其中 B 的每段弧的长度都等于 $\frac{\pi}{m}$,m 是个自然数,用 A^j 表示将集合 A 沿反时针方向在圆周上转动 $\frac{j\pi}{m}(j=1,2,3,\cdots)$ 弧度所得的集合.求证:存在自然数 k,使得

$$l(A^k\cap B)\geqslant\frac{1}{2\pi}l(A)l(B)$$

这里 $l(X)$ 表示组成点集 X 的互不相交的弧段的长度之和.

证明 对于半径为1的圆周上的点集 E,用 $E^{(j)}$ 表示将 E 沿顺时针方向在圆周上转动 $j\pi/m(j=1,2,3,\cdots)$ 弧度所得的集合.设 B 是由 i_0 段互不相交的长度都是 π/m 的弧组成,这 i_0 段记为 $B_1,B_2,\cdots,B_{i_0}$.于是

$$l(A^k\cap B)=l(A\cap B^{(k)})=\sum_{i=1}^{i_0}l(A\cap B_i^{(k)}),k=1,2,\cdots$$

又由于

$$l(A)=\sum_{k=1}^{2m}l(A\cap B_i^{(k)}),i=1,2,\cdots,i_0$$

就得到

$$\sum_{k=1}^{2m}l(A^k\cap B)=\sum_{k=1}^{2m}(\sum_{i=1}^{i_0}i(A\cap B_i^{(k)}))=$$
$$\sum_{i=1}^{i_0}\sum_{k=1}^{2m}l(A\cap B_i^{(k)})=i_0l(A)$$

因为 $2m$ 个数之和为 $i_0l(A)$,因此,在 $1,\cdots,2m$ 中至少有一个 k_0,使得

$$l(A^{k_0}\cap B)\geqslant\frac{1}{2m}i_0l(A)$$

注意到 B 是 i_0 段互不相交的长度都是 π/m 的弧所组成

$$l(B)=i_0\pi/m$$

即有

$$l(A^{k_0} \cap B) \geqslant \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\pi}{m} i_0 l(A) = \frac{1}{2\pi} l(A) \cdot l(B)$$

注 在讨论的点集都是圆周上互不相交的有限弧段所组成的集时，$l(A)$ 相当于 A 的长度. 证明中用到的主要是下面的原理：

如果 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 互不相交，则

$$l(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k) = l(A_1) + \cdots + l(A_k)$$

证明中，$l(A) = \sum\limits_{k=1}^{2m} l(A \cap B_i^{(k)})$ 这个等式是因为 $\bigcup\limits_{k=1}^{2m} B_i^{(k)}$ 就是整个圆周，在这里，B_i 如果是长度为 $\frac{\pi}{m}$ 的“半开半闭”的弧也完全适用. 由于长度与弧段含不含端点是没有关系的，因此也不特别强调. 有的同学用了“每一个点被盖住多少次”的说法，理由是没说清楚的. 例如有若干块(为简单起见，假定都是三角形的)板放在桌上. 设为 A 及 $B_1, B_2, \cdots, B_{10}$，如果 A 的每一点都至少被 $B_1, \cdots, B_{10}$ 中的四块所盖住，要证明 $B_1, \cdots, B_{10}$ 中至少有一块面积大于等于 $\frac{4}{10}$ 乘 A 的面积，就不是很容易的事.

2 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n (n \geqslant 2)$ 都是正数且 $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1$，求证

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\sqrt{1 - x_i}} \geqslant \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \sqrt{x_i}}{\sqrt{n - 1}}$$

证明

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\sqrt{1-x_i}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1-x_i}} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1-x_i}{\sqrt{1-x_i}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1-x_i}} - \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1-x_i}$$

由柯西不等式

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{1-x_i} = \sum_{i=1}^{n} (\sqrt{1-x_i} \cdot 1) \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (1-x_i)} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} 1} = \sqrt{n-1}\sqrt{n}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{x_i} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i}\sqrt{n} = \sqrt{n}$$

又对于 n 个正数 $y_1, \cdots, y_n$，由算术 - 几何 - 调和平均不等式

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i \geqslant \sqrt[n]{y_1 y_2 \cdots y_n} \geqslant \frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{y_i}}$$

所以
$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{y_i}\geqslant\frac{n^2}{\sum_{i=1}^{n}y_i}$$

把这些不等式合起来，就得到

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\sqrt{1-x_i}}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1-x_i}}-\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1-x_i}\geqslant$$
$$\frac{n^2}{\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1-x_i}}-\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1-x_i}\geqslant$$
$$\frac{n^2}{\sqrt{n-1}\sqrt{n}}-\sqrt{n-1}\sqrt{n}=$$
$$\frac{n^2-(n-1)n}{\sqrt{n-1}\sqrt{n}}=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}}\geqslant$$
$$\frac{1}{\sqrt{n-1}}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}$$

注　本题有多种证法，原式右端由柯西不等式即知是小于等于$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}}$的. 至于左端，考虑函数 $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1-x}}$，直接计算 $f(x)$ 的导数，得到 $f''(x)>0(x\in(0,1))$. 从而 f 在 $(0,1)$ 上是凸函数. 因此对于 $(0,1)$ 中的 $x_1,\cdots,x_n$

$$f(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n})\leqslant\frac{1}{n}(f(x_1)+\cdots+f(x_n))$$

因而题中不等式左端

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\sqrt{1-x_i}}=\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\geqslant n\cdot f(\frac{1}{n})=n\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}}=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}}$$

也就证明了题中的不等式.

3 设 S 是复平面上的单位圆周(即模等于 1 的复数的集合)，f 是从 S 到 S 的映射，对于任何 $z\in S$，定义

$$f^{(1)}(z)=f(z),f^{(2)}(z)=f(f(z)),\cdots,$$
$$f^{(k)}(z)=\underbrace{f(f(\cdots(f}_{k\text{个}f}(z)))),\cdots$$

如果 $c\in S$ 及自然数 n 使得

$$f^{(1)}(c)\neq c,f^{(2)}(c)\neq c,\cdots,f^{(n-1)}(c)\neq c,f^{(n)}(c)=c$$

我们就说 c 是 f 的 n - 周期点.

设 m 是大于 1 的自然数，f 的定义如下

$$f(z)=z^m,z\in S$$

试计算 f 的 1 989 - 周期点的总数.

解 由 $f(z)=z^m$，用归纳法易知 $f^{(n)}(z)=z^{m^n}(n=1,2,3,\cdots)$.

对于自然数 n，记 $B_n=\{z\in S\mid f^{(n)}(z)=z\}$. 由于 B_n 是1的 m^n-1 次根的全体所成之集，所以 $|B_n|=m^n-1$（$|B|$ 表示集合 B 中元素的个数）.

对于自然数 k 及 $z\in B_k$，易见对于自然数 r

$f^{(rk)}(z)=f^{((r-1)r)}(f^{(k)}(z))=f^{((r-1)k)}(z)=\cdots=f^{(k)}(z)=z$

所以当 k,n 为自然数且 $k\mid n$ 时，$B_k\subset B_n$.

又如果 k,n 为自然数，$n=rk+j(1\leqslant j\leqslant k-1)$，且 $z\in B_k$，有

$$f^{(n)}(z)=f^{(j)}(f^{(rk)}(z))=f^{(j)}(z)$$

所以，如果 $z\in B_k\cap B_n$，则由上式得 $z\in B_j$. 用辗转相除法，即知 $B_k\cap B_n\subset B_{(k,n)}$（$(k,n)$ 表示 k 和 n 的最大公约数）.

把上面的结论合并起来，即得

$$B_k\cap B_n=B_{(k,n)} \qquad ①$$

由定义，$\{f$ 的 1 989 − 周期点全体$\}=B_{1\,989}\setminus(\bigcup\limits_{k=1}^{1\,988}B_k)$. 因此，它等于

$$B_{1\,989}\setminus(\bigcup_{k=1}^{1\,988}(B_{1\,989}\cap B_k))=B_{1\,989}\setminus(\bigcup B_t)$$

（此处 $t\in T=\{t\mid t$ 整除 1 989，$t<1\,989\}$）

由于 $1\,989=3^2\cdot 221=3^2\cdot 13\cdot 17$，1 989 的真约数必是 663（$=3\cdot 13\cdot 17$），153（$=3^2\cdot 17$），117（$=3^2\cdot 13$）这三个数中（至少）一个约数，所以

$$\{f\text{ 的 1 989 − 周期点全体}\}=B_{1\,989}\setminus(B_{663}\cup B_{153}\cup B_{117})$$

由容斥原理

$|B_{663}\cup B_{153}\cup B_{117}|=$

$|B_{663}|+|B_{153}|+|B_{117}|-|B_{663}\cap B_{153}|-$

$|B_{663}\cap B_{117}|-|B_{153}\cap B_{117}|+|B_{663}\cap B_{153}\cap B_{117}|=$

$|B_{663}|+|B_{153}|+|B_{117}|-|B_{51}|-|B_{39}|-|B_9|+|B_3|$

于是，f 的 1 989 − 周期点的总数为

$$m^{1\,989}-m^{663}-m^{153}-m^{117}+m^{51}+m^{39}+m^9-m^3 \qquad ②$$

注 在本题的解答中，式 ① 是重要的，再由 1 989 的三个约数 663，153，117 的性质（1 989 有三个素约数 3，13，17，这三个数是 1 989 分别除以这三个素约数的商），就得到式 ②. 再用容斥原理即得到结果. 参赛学生中，不少人通过对于单位根的讨论，得到了相当于 ① 的结论，一部分学生还指出了 1 989 的这三个约数的性质，但极少人写出相当于 ② 的结论，一般都直接写出“由容斥原理，即得 f 的 1 989 − 周期点的总数为 ……”，但算出的结果却有好

几种不同答案.本解答中用 B_n 的写法,使得容斥原理的用法明确而清楚.

4 设点 D,E,F 分别在 $\triangle ABC$ 的三边 BC,CA,AB 上,且 $\triangle AEF,\triangle BFD,\triangle CDE$ 的内切圆有相等的半径 r.又以 r_0 和 R 分别表示 $\triangle DEF$ 和 $\triangle ABC$ 的内切圆半径,求证

$$r+r_0=R$$

证明 把 $\triangle AEF,\triangle BFD,\triangle CDE$ 的内切圆圆心分别记为 O_1,O_2,O_3,又对于一个三角形,用 S,P 分别表示面积及周长,我们先证明

$$P_{\triangle O_1O_2O_3}=P_{\triangle DEF},S_{\triangle O_1O_2O_3}=S_{\triangle DEF}$$

三个内切圆圆 O_1,圆 O_2,圆 O_3 与相应的三角形的切点标记如图1所示.由于

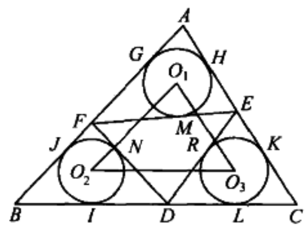


图1

$$\overline{DE}=\overline{DR}+\overline{RE}=\overline{DL}+\overline{EK},\overline{EF}=\overline{EM}+\overline{MF}=\overline{EH}+\overline{FG}$$

及

$$\overline{FD}=\overline{FN}+\overline{ND}=\overline{FJ}+\overline{ID}$$

所以

$$P_{\triangle DEF}=\overline{KH}+\overline{GJ}+\overline{IL}$$

再因为 O_2I,O_3L 都与 BC 垂直,且 $O_2I=\overline{O_3L}=r$,因此,有 $\overline{O_2O_3}=\overline{IL}$,同理 $\overline{O_3O_1}=\overline{KH},\overline{O_1O_2}=\overline{GJ}$.即得

$$P_{\triangle DEF}=P_{\triangle O_1O_2O_3}$$

再看 $\triangle DEF$ 与 $\triangle O_1O_2O_3$ 的面积.

$$\begin{aligned}S_{\triangle ABC}-S_{\triangle DEF}&=S_{\triangle AEF}+S_{\triangle BFD}+S_{\triangle CDE}=\\&\frac{r}{2}(P_{\triangle AEF}+P_{\triangle BFD}+P_{\triangle CDE})=\\&\frac{r}{2}(P_{\triangle ABC}+P_{\triangle DEF})\end{aligned}$$

而 $S_{\triangle ABC}-S_{\triangle O_1O_2O_3}$ 是三个等腰梯形 $AO_1O_2B,BO_2O_3C,CO_3O_1A$ 的面积之和,所以

$$\begin{aligned}S_{\triangle ABC}-S_{\triangle O_1O_2O_3}&=S_{AO_1O_2B}+S_{BO_2O_3C}+S_{CO_3O_1A}=\\&\left(r\cdot\overline{GJ}+\frac{1}{2}r\cdot\overline{AG}+\frac{1}{2}r\cdot\overline{JB}\right)+\\&\left(r\cdot\overline{IL}+\frac{1}{2}r\cdot\overline{BI}+\frac{1}{2}r\cdot\overline{LC}\right)+\\&\left(r\cdot\overline{KH}+\frac{1}{2}r\cdot\overline{CK}+\frac{1}{2}r\cdot\overline{HA}\right)=\\&\frac{r}{2}(2\,\overline{GJ}+2\,\overline{IL}+2\,\overline{KH}+\overline{AG}+\overline{JB}+\\&\overline{BI}+\overline{LC}+\overline{CK}+\overline{HA})=\end{aligned}$$

$$\frac{r}{2}(\overline{GJ}+\overline{IL}+\overline{KH}+P_{\triangle ABC})=$$

$$\frac{r}{2}(P_{\triangle O_1O_2O_3}+P_{\triangle ABC})$$

由 $P_{\triangle DEF}=P_{\triangle O_1O_2O_3}$ 即得 $S_{\triangle DEF}=S_{\triangle O_1O_2O_3}$.

这样,$\triangle DEF$ 和 $\triangle O_1O_2O_3$ 的内切圆半径相等(都是 r_0).

AO_1,BO_2,CO_3 分别是 $\angle A,\angle B,\angle C$ 的平分线,其延长线的交点 O 是 $\triangle ABC$ 的内心.因为 $O_1O_2/\!/AB,O_2O_3/\!/BC,O_3O_1/\!/CA$,$O$ 也是 $\triangle O_1O_2O_3$ 的内心.O 到 AB 的距离是 R,O 到 O_1O_2 的距离是 $\triangle O_1O_2O_3$ 的内切圆半径,等于 $\triangle DEF$ 的内切圆半径 r_0,O_1O_2 与 AB 的距离为 r,易见 $r+r_0=R$.

本题有多种解法,这里的证明只用到平面几何工具.

5 空间中有 1 989 个点,其中任何三点不共线,把它们分成点数各不相同的 30 组,在任何三个不同的组中各取一点为顶点作三角形.问:要使这种三角形的总数最大,各组的点数应为多少?

解 把 1 989 个点分成 30 组,各组的点数记为 $n_1,\cdots,n_{30}$ 时,在任何三个不同的组中各取一点为顶点作三角形,则这种三角形的总数为 $\sum\limits_{1\leqslant i<j<k\leqslant 30}n_in_jn_k$.

由于总共只有有限种分法,因而使所作三角形总数最大的分法必定存在.

如果把一种分法的两组点数改动,其余各组不变,不妨设各组点数为 $n'_1,n'_2,\cdots,n'_{30}$,而 $n'_i=n_i(i=3,4,\cdots,30)$.由于

$$\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant 30}n_in_jn_k=(\sum_{k=3}^{30}n_k)n_1n_2+(\sum_{3\leqslant j<k\leqslant 30}n_jn_k)(n_1+n_2)+\sum_{3\leqslant i<j<k\leqslant 30}n_in_jn_k\quad\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant 30}n'_in'_jn'_k=$$

$$(\sum_{k=3}^{30}n'_k)n'_1n'_2+(\sum_{3\leqslant j<k\leqslant 30}n'_jn'_k)(n'_1+n'_2)+\sum_{3\leqslant i<j<k\leqslant 30}n'_in'_jn'_k=(\sum_{k=3}^{30}n_k)n'_1n'_2+$$

$$(\sum_{3\leqslant j<k\leqslant 30}n_jn_k)(n_1+n_2)+\sum_{3\leqslant i<j<k\leqslant 30}n_in_jn_k$$

因为 $n_1+n_2=n'_1+n'_2$,因此,如果

$$|n'_2-n'_1|<|n_2-n_1|$$

就有
$$\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant 30}n_in_jn_k<\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant 30}n'_in'_jn'_k$$

现设各组点数为 $n_1,\cdots,n_{30}$ 时,所作三角形总数最大,由于要求各组点数都不同,不妨设 $n_1<n_2<\cdots<n_{30}$.由上所述,可得到

$n_1,\cdots,n_{30}$必须有下列性质：

(1) 对于任何 $k(1\leqslant k\leqslant 29)$，$n_{k+1}-n_k\leqslant 2$.

如果某一个 k_0 使 $n_{k_0+1}-n_{k_0}\geqslant 3$，则取 $n'_{k_0}=n_{k_0}+1$，$n'_{k_0+1}=n_{k_0+1}-1$（$n'_i=n_i$，当 $i\neq k_0,k_0+1$），即在第 k_0+1 组中把一个点放入第 k_0 组，将使所作三角形总数确实增大.

(2) 使得 $n_{k+1}-n_k=2$ 的 k 至多只有一个.

如果有二个 i,j（不妨设 $1\leqslant i<j<29$）使得 $n_{i+1}-n_i=2$，$n_{j+1}-n_j=2$. 这时取 $n'_{j+1}=n_{j+1}-1$，$n'_i=n_{i+1}$（其余各组点数不变），这样将使所作三角形总数确实增大.

由于 $\sum\limits_{i=1}^{30}n_i=1\ 989$，因此不可能

$$n_{k+1}-n_k=1,k=1,2,\cdots,29$$

（否则这30个数是等差数列，其和应为15的倍数，但 $15\nmid 1\ 989$）. 因而恰有一个 k_0 使 $n_{k_0+1}-n_{k_0}=2$. 这 30 个数为

$$n_1,n_1+1,\cdots,n_1+k_0-1,n_1+k_0+1,\cdots,n_1+30$$

于是

$$1\ 989+k_0=\frac{1}{2}\cdot 30(n_1+1+n_1+30)=15(2n_1+31)$$

解得

$$k_0=6,n_1=51$$

所求的各组点数为 51,52,…,56,58,59,…,81.

注 本题实际上是属要论证的题，使总数最大的分法存在是需要指出的. 从逻辑上讲，由存在性、必要条件以及使必要条件满足的解的唯一性，才能保证这是使得总数最大的分法. 有的同学在论证时，用了如“当各组的点数越接近时，所做三角形总数越大”的说法. 在两组的情况下这话还可理解，而在 30 组的情况下，“各组点数越接近”其实是一个含糊的说法. 这是在论证中应该努力避免的.

6 f 是定义在 $(1,+\infty)$ 上且在 $(1,+\infty)$ 中取值的函数，满足条件：对任何 $x,y>1$ 及 $u,v>0$，都成立

$$f(x^uy^v)\leqslant f(x)^{\frac{1}{4u}}f(y)^{\frac{1}{4v}}$$

试确定所有这样的函数 f.

解 设 f 是满足题中条件的函数，特别取 $u=\frac{1}{2}$，得

$$f(x^{\frac{1}{2}}y^v)\leqslant f(x)^{\frac{1}{2}}f(y)^{\frac{1}{4v}},x,y>1,v>0$$

对于 $x,y>1$，取 v 使 $y^v=x^{\frac{1}{2}}$，即 $u=\frac{1}{2}\frac{\ln x}{\ln y}$（这样的 v 是正数），从而对于 $x,y>1$，都成立

$$f(x) \leqslant f(x)^{\frac{1}{2}} f(y)^{\frac{\ln y}{2\ln x}}$$

$$f(x)^{\frac{1}{2}} \leqslant f(y)^{\frac{\ln y}{2\ln x}}$$

$$f(x)^{\ln x} \leqslant f(y)^{\ln y}$$

由对称性，$f(x)^{\ln x} = f(y)^{\ln y}$，因此 $f(x)^{\ln x}$ 是个常数 $c(c > 1)$，从而

$$f(x) = c^{\frac{1}{\ln x}}$$

下面验证当 $c > 1$ 时，函数 $f(x) = c^{\frac{1}{\ln x}}$ 确实满足题中条件，对于 $x, y > 1, u, v > 0$，由于

$$f(x^u y^v) = c^{1/\ln x^u y^v} = c^{\frac{1}{u\ln x + v\ln y}}$$

即要验证 $\quad c^{\frac{1}{u\ln x + v\ln y}} \leqslant c^{\frac{1}{4u\ln x}} \cdot c^{\frac{1}{4v\ln y}} = c^{\frac{1}{4u\ln x} + \frac{1}{4v\ln y}}$

由 $c > 1$，上面的不等式等价于

$$\frac{1}{u\ln x + v\ln y} \leqslant \frac{1}{4u\ln x} + \frac{1}{4v\ln y}$$

稍作代数运算，这个不等式等价于

$$4uv\ln x\ln y \leqslant (u\ln x + v\ln y)^2$$

但最后这个不等式是确实成立的.

由上所述，满足题中条件的函数是 $f(x) = c^{\frac{1}{\ln x}}$，其中 c 是任何大于 1 的实数.

注　本题是求满足一个不等式的函数的一般形式，但由于不等式对于任何 $x, y > 1, u, v > 0$ 成立，这个条件是很强的. 而由这个不等式就可以决定这函数必须是形为 $c^{\frac{1}{\ln x}}$ 的函数. 但这只是必要条件，所以后面的验证是不可少的.

第5届中国数学奥林匹克

郑州,1990

1 如图1,在凸四边形 $ABCD$ 中,AB 与 CD 不平行,圆 O_1 过 A,B 且与边 CD 相切于 P,圆 O_2 过 C,D 且与边 AB 相切于 Q,圆 O_1 与圆 O_2 相交于 E,F.求证:EF 平分线段 PQ 的充分必要条件是 $BC \parallel AD$.

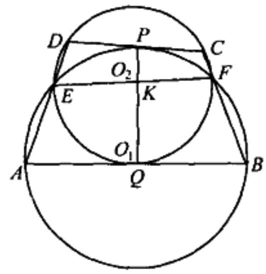


图1

解 延长 CD 与 BA 交于 I,又延长 PQ,设其交 O_1 于 H,交 O_2 于 G(图略).先证明 $AD \parallel BC$ 是 $PG = QH$ 的充要条件,这是因为

$$PG = QH \Leftrightarrow DP \cdot PC = AQ \cdot QB \Leftrightarrow$$
$$(IP - ID)(IC - IP) = (IQ - IA)(IB - IQ) \Leftrightarrow$$
$$IP \cdot IC - ID \cdot IC - IP^2 + ID \cdot IP =$$
$$IQ \cdot IB - IA \cdot IB - IQ^2 + IA \cdot IQ \Leftrightarrow$$
$$IP(IC + ID) = IQ(IA + IB)^2 \Leftrightarrow$$
$$IP^2(IC + ID)^2 = IQ^2(IA + IB)^2 \Leftrightarrow$$
$$IA \cdot IB(IC + ID)^2 = IC \cdot ID(IA + IB)^2 \Leftrightarrow$$
$$(IA \cdot IC - IB \cdot ID)(IB \cdot IC - IA \cdot ID) = 0 \Leftrightarrow$$
$$IA \cdot IC = IB \cdot ID(\text{显然 } IB \cdot IC \neq IA \cdot ID) \Leftrightarrow$$
$$AD \parallel BC$$

所以 $$AD \parallel BC \Leftrightarrow PG = QH$$

因为 $$(GP + PK)KQ = EK \cdot KF = (HQ + QK)KP$$

所以 $$GP \cdot KQ = HQ \cdot KP$$

所以 $$PG = QH \Leftrightarrow KQ = KP$$

这样就得到 $$AD \parallel BC \Leftrightarrow KQ = KP$$

2 设 x 是一个自然数.若一串自然数 $x_0 = 1, x_1, x_2, \cdots, x_{l-1}, x_l = x$,满足 $x_{i-1} < x_i, x_{i-1} \mid x_i, i = 1, 2, \cdots, l$.则称 $\{x_0, x_1, x_2, \cdots, x_l\}$ 为 x 的一条因子链,l 为该因子链的长度.$L(x)$ 与 $R(x)$ 分别表示 x 的最长因子链的长度和最长因子链的条数.

对于 $x = 5^k \times 31^m \times 1\,990^n$($k, m, n$ 是自然数),试求 $L(x)$ 与 $R(x)$.

解 对于 $x = 5^k \times 31^m \times 1\,990^n$ 的任一个因子链,定义 $y_i = \frac{x_i}{x_{i-1}}(i = 1,2,\cdots,l)$. 显然 y_i 是大于 1 的自然数,且

$$y_1 y_2 \cdots y_l = x = 2^n \times 5^{k+n} \times 31^m \times 1\,990^n$$

即得 $L(x) = \max l = n + (k + n) + m + n = k + m + 3n$

(当 y_i 为 x 的素因子时最大值可达到)

注意到 $y_1, y_2, \cdots, y_l$ 当 l 取最大值 $k + m + 3n$ 时,恰好是 n 个 2, $k + n$ 个 5, m 个 31 与 n 个 199 的一个排列,反之,从每一个这样的排列可以得到一组 $\{y_1, y_2, \cdots, y_l\}$,从而得到 $\{x_0, x_1, \cdots, x_l\}$(因为 $x = y_i y_{i-1} \cdots y_1$).

所以 $R(x)$ 等于 n 个 2, $k + n$ 个 5, m 个 31 与 n 个 199 的排列个数. 即

$$R(x) = \frac{(k + m + 3n)!}{n!\,n!\,m!\,(k + n)!}$$

3 设函数 $f(x)$ 对 $x \geqslant 0$ 有定义,且满足条件:

(1) 对任何 $x, y \geqslant 0, f(x)f(y) \leqslant y^2 f(\frac{x}{2}) + x^2 f(\frac{y}{2})$;

(2) 存在常数 $M > 0$,当 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 时, $|f(x)| \leqslant M$.

求证: $f(x) \leqslant x^2$.

解 先令 $x = y = 0$,代入题给不等式,得到 $f^2(0) \leqslant 0$,即 $f(0) = 0$.

$x \neq 0$ 时,定义 $G(x) = \frac{f(x)}{x^2}$,我们仅需证明 $G(x) \leqslant 1$ 即可.

由题意知 $G(x)G(y) \leqslant \frac{1}{4}(G(x) + G(y))$,令 $x = y$ 得

$$2G^2(x) \leqslant G(\frac{x}{2})$$

即 $$G(\frac{x}{2^t}) \geqslant 2^{2^t - 1} G^{2^t}(x)$$

当 $t = 1$ 时成立.

设此式当 $t = k$ 时成立.

$t = k + 1$ 时有

$$G(\frac{x}{2^{k+1}}) \geqslant 2G^2(\frac{x}{2^k}) \geqslant 2(2^{2^k} G^{2^k}(x))^2 = 2^{2^{k+1} - 1} G^{2k+1}(x)$$

因此 $G(\frac{x}{2^t}) \geqslant 2^{2^t - 1} G^{2^t}(x)$ 对任意 $t \in \mathbf{N}$ 都成立.

若存在一个 x_0,使 $G(x_0) > 1$,那么取 $t > \log_2 x_0$ 就有 $0 < \frac{x_0}{2^t} < 1$,且

$$\frac{M}{(\frac{x_0}{2^t})^2} \geqslant \left| G(\frac{x^0}{2^t}) \right| \geqslant 2^{2^t-1} G^{2^t}(x_0) > 2^{2^t-1}$$

即
$$\frac{M}{x_0^2} > 2^{2^t-2t-1}$$

不等式左边为常数,右边当 $t \to \infty$ 时无上界,显然是矛盾的,这样得到 $G(x_0) > 1$ 不可能,所以 $G(x) \leqslant 1$.

4 设 a 是给定的正整数,A 和 B 是两个实数,试确定方程组

$$x^2 + y^2 + z^2 = (Ba)^2$$

$$x^2(Ax^2 + By^2) + y^2(Ay^2 + Bz^2) + z^2(Az^2 + Bx^2) = \frac{1}{4}(2A + B)(Ba)^4$$

有正整数解的充分必要条件(用 A,B 的关系式表示,并予以证明).

解 我们来证明此方程组有正整数解的充要条件是 $B = 2A$.

充分性:$B = 2A$ 时,容易验证,方程组有正整数解 $x = 12a$, $y = 3a$, $z = 4a$.

必要性:将第一个方程代入第二个方程,消去 a 得

$$x^2(Ax^2 + By^2) + y^2(Ay^2 + Bz^2) + z^2(Az^2 + Bx^2) = \frac{1}{4}(2A + B)(x^2 + y^2 + z^2)^2$$

展开移项分解因式得

$$(2A - B)(x^4 + y^4 + z^4 - 2x^2y^2 - 2y^2z^2 - 2z^2x^2) = 0$$

若 $2A \neq B$,则有

$$x^4 + y^4 + z^4 - 2x^2y^2 - 2y^2z^2 - 2z^2x^2 = 0$$

即 $$(x + y + z)(x + y - z)(y + z - x)(z + x - y) = 0$$

不妨设 $x + y - z = 0$,这就有

$$x^2 + y^2 + (x + y)^2 = (13a)^2 \qquad (*)$$

我们来证明等式$(*)$对任意正整数 x, y, a 都不成立,否则,设有一组 x_0, y_0, a_0 使得等式成立.显然,a_0 为偶数,设 $a_0 = 2a'_0$,此时 $A \mid x_0^2 + y_0^2 + (x_0 + y_0)^2$,必有 $2 \mid x_0$,$2 \mid y_0$,设 $x_0 = 2x'_0$,$y_0 = 2y'_0$,于是

$$x'^2_0 + y'^2_0 + (x'_0 + y'_0)^2 = (13a'_0)^2$$

这就得到$\frac{x_0}{2}, \frac{y_0}{2}, \frac{a_0}{2}$ 也是一组解,重复这个过程,可知 $2^t \mid a_0$, $t \in \mathbf{N}$,矛盾,所以 $2A = B$.

❺ 设 X 是一个有限集合，法则 f 使得 X 的每一个偶子集 E(偶数个元素组成的子集)都对应一个实数 $f(E)$，且满足条件:

(Ⅰ)存在一个偶子集 D，使得 $f(D)>1\,990$;

(Ⅱ)对于 X 的任意两个不相交的偶子集 A,B，有

$$f(A\cup B)=f(A)+f(B)-1\,990$$

求证:存在 X 的子集 P 和 Q，满足

(1) $P\cap Q=\varnothing, P\cup Q=X$;

(2) 对 P 的任何非偶子集 S，有 $f(S)>1\,990$;

(3) 对 Q 的任何偶子集 T，有 $f(T)\leqslant 1\,990$.

证明 首先，在 $f(A\cup B)=f(A)+f(B)-1\,990$ 中，令 $A=B=\varnothing$，可得到 $f(\varnothing)=1\,990$.

设 $D=A_1\cup A_2\cup A_3\cdots\cup A_k$，$A_i$ 有两个元素($i=1,2,\cdots,k$)，易知

$$F(D)=f(A_1)+f(A_2)+\cdots+f(A_k)-(k-1)\times 1\,990>1\,990$$

$$f(A_1)+f(A_2)+\cdots+f(A_k)>1\,990k$$

必存在一个 i，使得 $f(A_i)>1\,990$. 于是，A_i 的任何非空偶子集 S，都有 $f(S)>1\,990$，在所有满足条件(2)的子集中(显然，这样的子集存在)，找出一个元素个数最多的，不妨设为 P_1，P_1 的补集设为 Q_1.

在 Q_1 中，若任何 Q_1 的二元子集对应的 f 值都小于或等于 1 990，那么就容易证明 Q 满足条件(3)，这样 P_1,Q_1 就满足条件(1)，(2)，(3)，因此，不妨设 Q_1 的一个二元子集 $\{x,y\}$ 满足 $f(\{x,y\})>1\,990$.

若对 P_1 中的每一个元素 a，$f(\{x,a\})>1\,990$ 的话，很显然，$P_1\cup\{x\}$ 也满足条件(2)，并且 $P_1\cup\{x\}$ 比 P_1 的元素个数多.

因此 P_1 中存在一个 a，$f(\{x,a\})\leqslant 1\,990$，同理也存在一个 b，$f(\{y,b\})\leqslant 1\,990$.

若 $a\neq b$，就有

$$f(\{x,y,a,b\})=f(\{x,y\})+f(\{a,b\})-1\,990>1\,990$$

与 $f(\{x,y,a,b\})=f(\{x,a\})+f(\{y,b\})-1\,990\leqslant 1\,990$

矛盾，因此 $a=b$，即 $f(\{x,a\})\leqslant 1\,990$，$f(\{y,a\})\leqslant 1\,990$，并且对于 P_1 中的其他任意元素 c，有 $f(\{x,c\})>1\,990$，$f(\{y,c\})>1\,990$，此时，容易验证:

$P_1/a\cup\{x,y\}$ 亦满足条件(2)，并且元素个数比 P_1 多.

这就得出了矛盾，因此结论成立.

6 凸 n 边形及 $n-3$ 条边在形内不相交的对角线组成的图形称为一个剖分图.

求证:当且仅当 $3\mid n$ 时,存在一剖分图是可以一笔画的圈(即可以从一个顶点出发,经过各线段恰一次,最后回到出发点).

解 我们先证明所谓的剖分图是 n 边形分成 $n-2$ 个三角形,若不是的话,必然有一些剖分是 $m(m>3)$ 边形.容易知道 $n-3$ 条不相交的对角线将 n 边形分为 $n-2$ 块,我们考虑这些剖分的内角和的总和,它大于 $(n-2)\pi$,矛盾.

下面来证明可将这些三角形染红、蓝二色,使有相邻边的三角形染不同颜色,对 n 归纳.

$n=3$ 时,显然.

设 $n=k$ 时,结论成立.

当 $n=k+1$ 时,n 边形被平分成 $k-1$ 个三角形,必有一个三角形的两条边为 $k+1$ 边形的边,去掉这个三角形,剩下的 k 边形由归纳假设可以二染色,再将去掉的三角形染上与它相邻的那个三角形不同的颜色就可以了.

现在可以证明原题了.当此图为一个一笔画的圈时,由欧拉定理,每点发出的边数为偶,于是每顶点发出三角形个数为奇,这就得到 n 边形周界上的三角形都是同种颜色,不妨设为红色.

n 边形的每条边,都是一个红三角形的边,它的每条对角线都同时是一个蓝三角形和一个红三角形的边,于是

$$3\times\text{红三角形个数}-3\times\text{蓝三角形个数}=n$$

也就是 $3\mid n$.

当 $n=3l$ 时,我们对 l 进行归纳.

$l=1$ 时,结论显然成立.设 $l=k$ 时,结论成立.当 $l=k+1$ 时,如图1所示,可截出一个五边形,对于 $3k$ 边形,用归纳假设,对五边形,用如图1所示的剖分,设 $3k$ 边形的一笔画的圈为 $\cdots AB\cdots$,则现在一笔画的圈为 $\cdots A(BDACDE)B\cdots$

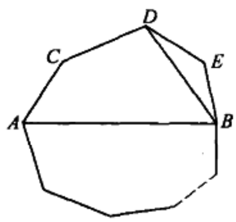


图1

第6届中国数学奥林匹克

武汉,1991

1 平面上有一个凸四边形 $ABCD$.

(1) 如果平面上存在一点 P,使得 $\triangle ABP$,$\triangle BCP$,$\triangle CDP$ 和 $\triangle DAP$ 的面积都相等,问四边形 $ABCD$ 要满足什么条件?

(2) 满足(1) 的点 P,平面上最多有几个?证明你的结论.

解 首先设点 P 在四边形 $ABCD$ 内部,如图 1 所示,则由 $S_{\triangle ABP}=S_{\triangle CBP}$ 可知,A,C 到 BP 的距离相等,由 $S_{\triangle BAP}=S_{\triangle DAP}$ 可知 B,D 到 AP 的距离相等.同理可知:A,C 与 DP 等距,B,D 与 CP 等距.于是,如果 A,P,C 三点不共线,则因 B,D 与 AP,CP 均等距,可知必有 AP,CP 过 BD 的中点,因而 P 就是 BD 的中点,即 B,P,D 三点共线,而且 BD 平分对角线 AC.这时

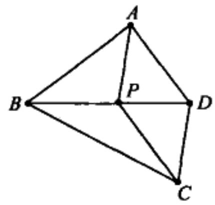


图 1

$$S_{\triangle APB}+S_{\triangle ADP}=S_{\triangle BCP}+S_{\triangle DCP}=\frac{1}{2}S_{ABCD}$$

故知四边形 $ABCD$ 应满足的条件是:存在一条对角线将它的面积平分,或者,存在一条对角线通过另一条对角线的中点.

易知,此二条件是等价的.而且当此条件满足时,其所述性质的点 P 只能有一个,即它位于平分四边形 $ABCD$ 的面积的对角线的中点上.如果两条对角线都把四边形的面积平分,则由上述证明过程可知 P 即是此二对角线的交点.

其次,设点 P 在四边形$ABCD$之外,如图2所示,则由 $S_{\triangle APB}=S_{\triangle CPB}$ 可知$AC \parallel PB$,由 $S_{\triangle BPA}=S_{\triangle DPA}$ 可知$BD \parallel PA$.记 AC 与 BD 的交点为E,则有 $APBE$ 是平行四边形,且 $S_{\triangle PAB}=S_{\triangle EAB}$.由于

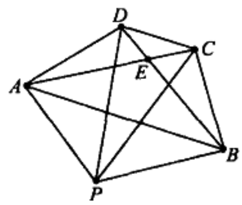


图 2

$$S_{\triangle PAB}=S_{\triangle PAD}+S_{\triangle PDC}+S_{\triangle PCB}-S_{ABCD}$$

可知 $$S_{\triangle PAB}=\frac{1}{2}S_{ABCD}=S_{\triangle EAB}$$

由此得出四边形 $ABCD$ 具有性质:其两对角线交点与某二相邻顶点所形成的三角形的面积恰是此四边形面积的一半,此即存在这样的点 P 时四边形 $ABCD$ 便满足条件.

此条件也是充分的.即如果凸四边形 $ABCD$ 两对角线 AC 与

BD 交于点 E，而且 $S_{\triangle AEB}=\frac{1}{2}S_{ABCD}$，则过点 A 作 $AP\parallel BC$，过点 B 作 $BP\parallel AC$，记 P 为 AP 与 BP 的交点，则不难验证点 P 满足条件 $S_{\triangle PAB}=S_{\triangle PBC}=S_{\triangle PCD}=S_{\triangle PDA}$.

由于在四边形内、外存在所述性质的点 P 时要求四边形 $ABCD$ 所满足的条件是对立的，因而，这样的点 P 在平面上最多只有一个.

2 设 $I=[0,1]$，$G=\{(x,y)\mid x\in I,y\in I\}$，求 G 到 I 的所有映射 f，使得对任何 $x,y,z\in I$，有

(1) $f(f(x,y),z)=f(x,f(y,z))$；

(2) $f(x,1)=x,f(1,y)=y$；

(3) $f(zx,zy)=z^kf(x,y)$.

这里 k 是与 x,y,z 都无关的正数.

解 设 $f(x,y)$ 满足所述条件(1)，(2)，(3)，则由(2)，(3)知，$f(0,1)=f(1,0)=0$，因而也有对所有 $0<x\leqslant 1$ 有 $f(0,x)=f(x,0)=0$. 再由任取 $z\in[0,1]$，但 $z\neq 0$，导出

$$f(0,0)=f(z\cdot 0,z\cdot 0)=z^kf(0,0)$$

因而 $$f(0,0)=0,k>0,z^k\neq 1$$

其次，设 $0<x\leqslant y\leqslant 1$，则由(3)及(2)知

$$f(x,y)=f\left(y\cdot\frac{x}{y},y\cdot 1\right)=y^kf\left(\frac{x}{y},1\right)=y^{k-1}x$$

设 $0<y\leqslant x\leqslant 1$，则由(3)及(2)知

$$f(x,y)=f\left(x\cdot 1,x\cdot\frac{y}{x}\right)=x^kf\left(1,\frac{y}{x}\right)=x^{k-1}y$$

现在取 $0<x<y<z<1$，则一方面

$$f(f(x,y),z)=f(y^{k-1}x,z)=z^{k-1}y^{k-1}x$$

另一方面 $$f(x,f(y,z))=f(x,z^{k-1}y)$$

对某固定的 z,y(由于 k 是与 x,y,z 无关的常数)，可取 x 充分小，即使之满足 $0<x<z^{k-1}y$，则进一步有

$$f(x,f(y,z))=(z^{k-1}y)^{k-1}x=z^{(k-1)^2}y^{k-1}x$$

于是由(1)得出

$$z^{k-1}y^{k-1}x=z^{(k-1)^2}y^{k-1}x$$

因 x,y,z 均不等于0，故有 $z^{k-1}=z^{(k-1)^2}$，即

$$z^{k-1}(z^{(k-1)^2-(k-1)}-1)=0$$

但 $z\neq 0$，故必须

$$(k-1)^2-(k-1)=0$$

即
$$(k-1)(k-2)=0$$
于是 $k=1$ 或 2.

当 $k=1$ 时,得映射 f_1 由下式定义
$$f_1(x,y)=\begin{cases}x & ,0\leqslant x\leqslant y\leqslant 1\\ y & ,0\leqslant y\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$$
当 $k=2$ 时,得映射 f_2 由下式定义
$$f_2(xy)=xy,0\leqslant x,y\leqslant 1$$
因而,合条件的映射 f 至多只有如上定义的两个.不难验证,$f_1(x,y)$ 与 $f_2(x,y)$ 确实满足条件(1),(2),(3).

3 地面上有 10 只小鸟在啄食,其中任意 5 只鸟中至少有 4 只在一个圆周上,问有鸟最多的一个圆周上最少有几只鸟?

解 首先我们证明至少有 5 只鸟在同一个圆周上.如若不然,则这10只鸟所可能组成的5只鸟组共有 $C_{10}^5=252$ 个,每个5只鸟组中有4只鸟共在一个圆周上.但这4只鸟总共可属于6个5只鸟组,于是不同的圆应有 $\frac{252}{6}=42$ 个.这 42 个不同的圆总共应有 $42\times4=168$ 只鸟站在它们上面,但实际只有 10 只鸟.因而,至少有一只鸟所站的位置属于 17 个圆周.

这 17 个不同的圆周除了公有这只鸟所站的位置外,另有 $3\times17=51$ 只鸟站在上面,但另外实际上只留下9只鸟.于是,至少还有一只鸟站在6个不同的圆周上.因而得出这两只鸟共同站在 6 个不同的圆周上,但另外仅余下 8 只鸟,这是不可能的.

其次我们证明:前面所得出的至少有 5 只鸟所在的这个圆周上至少站了 9 只鸟.

不妨记 A,B,C,D,E 为站在同一个圆周 C_1 上的5只鸟.如果结论不真,则不妨记不在 C_1 上的两只鸟为 H,K.则有:

因$\{A,B,C,H,K\}$ 这 5 只鸟组中有 4 只鸟在一个圆周上,而 H,K 均不在 C_1 上,因而可设 A,B,H,K 同在一个圆 C_2 上,而 $C_2\neq C_1$ 导致 C,D,E 均不在 C_2 上.

因$\{C,D,E,H,K\}$ 这 5 只鸟组中有 4 只鸟在一个圆周上,而 H,K 均不在 C_1 上,故可设 C,D,H,K 同在一个圆 C_3 上,而 E 不在 C_3 上.

于是,考查由 A,C,E,H,K 组成的 5 只鸟组其中任何 4 只鸟站在同一圆周上均导致矛盾,但如任何 4 只鸟不在同一圆周上又与所设矛盾.

故在 A,B,C,D,E 所站的圆周 C_1 之外,至多只能有 1 只鸟.即有鸟最多的一个圆周上至少有 9 只鸟.

4 求满足下述方程 $x^{2n+1}-y^{2n+1}=xyz+2^{2n+1}$ 的所有正整数解组 (x,y,z,n),这里 $n\geqslant 2$ 且 $y\leqslant 5\cdot 2^{2n}$.

解 首先,容易看出满足方程的 x,y 必须奇偶性相同,而且因右边是正数可知 $x>y$,因而 $x-y\geqslant 2$.

设 $y=1$,则 $x\geqslant 3$,由于$(2x)\geqslant 6$及 $z\leqslant 5\cdot 2^{2n}$,则如果存在正整数组$(x,1,z,n)$满足所给方程,则应有

$$\begin{aligned}1&=x^{2n+1}-2^{2n+1}-xz=\\&(x-2)(x^{2n}+x^{2n-1}\cdot 2+\cdots+x^n\cdot 2^n+\cdots+\\&x\cdot 2^{2n-1}+2^{2n})-xz\geqslant\\&(2n+1)\cdot(2x)^n-xz\geqslant\\&(2n+1)\cdot 6^{n-1}\cdot 2x-x\cdot 5\cdot 2^{2n}=\\&2^{2n}x\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\left(n+\frac{1}{2}\right)-5\right)\end{aligned}$$

但 $n\geqslant 2$,欲此式成立,必须$\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\left(n+\frac{1}{2}\right)<5$,这只在 $n=2$时才成为可能.将 $n=2,y=1$代入原方程得出

$$x^5-1=xz+2^5$$

即

$$x(x^4-z)=33$$

由于 $z\leqslant 5\cdot 2^{2n}=80$,$x,z$ 均为正整数,故只能取 $x=3$,从而 $z=70$.得一组解$(x,y,z,n)=(3,1,70,2)$.

设 $y=2$,则 $x\geqslant 4$,$xy\geqslant 8$,如果存在正整数组$(x,2,z,n)$满足所给方程,则应有

$$\begin{aligned}2^{2n+1}&=x^{2n+1}-2^{2n+1}-2xz\geqslant\\&2\cdot(2n+1)\cdot(2x)^n-2xz\geqslant\\&2\cdot(2n+1)\cdot 8^{n-1}\cdot 2x-2x\cdot 5\cdot 2^{2n}=\\&2^{3n-1}(2n+1)\cdot x-5\cdot 2^{2n+1}\cdot x=\\&2^{2n+1}\cdot x((2n+1)\cdot 2^{n-2}-5)\end{aligned}$$

欲此式成立,必须$(2n+1)\cdot 2^{n-2}-5\leqslant 0$,这只有 $n=2$时才可能(这时$(2n+1)\cdot 2^{n-2}=5$).但 $n=2$时原方程成为

$$x^5-2^5=2xz+2^5$$

或

$$x(x^4-2z)=64$$

注意到 $x\geqslant 4$,$z\leqslant 80$,与 $2z\geqslant x^4-16\geqslant 240$ 矛盾,故 $y=2$ 时所给方程无解.

设 $y\geqslant 3$,则 $x\geqslant 5$,$xy\geqslant 15$,如果这时所给方程有正整数组解,则应有

$$\begin{aligned}0&=x^{2n+1}-y^{2n+1}-xyz-2^{2n+1}=\\&(x-y)(x^{2n}+x^{2n-1}y+\cdots+\end{aligned}$$

$$x^ny^n+\cdots+xy^{2n-1}+y^{2n})-xyz-2^{2n+1}\geqslant$$
$$2(2n+1)(xy)^n-xyz-2^{2n+1}\geqslant$$
$$2(2n+1)(15)^{n-1}\cdot xy-xy\cdot 5\cdot 2^{2n}-2^{2n+1}=$$
$$2^{2n}xy\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{5}{2}\right)^{n-1}-5\right)-2^{2n+1}=$$
$$2^{2n+1}\left(\frac{1}{2}xy\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{5}{2}\right)^{n-1}-5\right)-1\right)$$

由于 $n\geqslant 2,\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{5}{2}\right)^{n-1}>3,xy\geqslant 15$,此式不可能成立.故 $y\geqslant 3$ 时所给方程无解.

故满足所给方程的正整数解组只有一个,即 $(x,y,z,n)=(3,1,70,2)$.

5 求所有自然数 n,使得

$$\min_{k\in\mathbf{N}}\left(k^2+\left[\frac{n}{k^2}\right]\right)=1\ 991$$

这里 $\left[\frac{n}{k^2}\right]$ 表示不超过 $\frac{n}{k^2}$ 的最大整数,$\mathbf{N}$ 是自然数集.

解 由于当 k 取遍所有自然数时,$k^2+\left[\frac{n}{k^2}\right]$ 的极小值是 1 991,故对所有自然数 k 有

$$k^2+\frac{n}{k^2}\geqslant 1\ 991$$

成立.因而

$$k^4-1\ 991k^2+n\geqslant 0$$
$$\left(k^2-\frac{1\ 991}{2}\right)^2+n-\frac{1\ 991^2}{4}\geqslant 0$$

当 $k=32$ 时,$k^2-\frac{1\ 991}{2}=\frac{57}{2}$ 使 $\left(k^2-\frac{1\ 991}{2}\right)^2$ 达到小极值 $\frac{57^2}{4}$.因而应有

$$n\geqslant\frac{1}{4}(1\ 991^2-57^2)=$$
$$\frac{1}{4}\cdot(1\ 991+57)(1\ 991-57)=1\ 024\cdot 967$$

另一方面,$k^2+\left[\frac{n}{k^2}\right]$ 的极小值是 1 991 也意味着存在自然数 k 使

$$k^2+\frac{n}{k^2}<1\ 992$$

即
$$k^4-1\ 992k^2+n<0$$
或
$$(k^2-966)^2+n-996^2<0$$

当 $k=32$ 时，$(k^2-996)^2=28^2$ 达到其极小值，故应有 $n\leqslant 996^2-28^2=1\,024\cdot 968$，… 故所求的自然数 n 满足

$$1\,024\cdot 967\leqslant n\leqslant 1\,024\cdot 967+1\,023$$

6 MO 牌足球由若干多边形皮块用三种不同颜色的丝线缝制而成，有以下特点：

(1) 任一多边形皮块的一条边恰与另一多边形皮块同样长的一条边用一种颜色的丝线缝合；

(2) 足球上每一结点恰好是三个多边形的顶点，每一结点的三条缝线的颜色不同.

求证：可以在这 MO 牌足球的每一结点上放置一个不等于 1 的复数，使得每一多边形皮块的所有顶点上放置的复数的乘积都等于 1.

解　不妨设三种不同的颜色分别为红、黄、蓝. 从球的外面向球看去，在每个结点处三种颜色的丝线，依红、黄、蓝为序时恰有两个转向，即顺时针向与反时针向.

现在，我们先在每条线缝上放置一个复数，方式如下：红色线缝上放置 1，黄色线缝上放置 $\left(\cos\frac{2\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}\right)$，蓝色线缝上放置 $\left(\cos\frac{4\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{4\pi}{3}\right)$. 在每条线缝上都依此规则放置数后再来对每个结点放置数. 规则如下：如果站在球外，正视该点时，该结点处所连接的 3 条线缝上丝线的颜色依顺时针方向正好依次是红、黄、蓝时，该结点处放置复数 $\left(\cos\frac{2\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}\right)$，如果依顺时针方向正好依次是红、蓝、黄时，该结点处放置复数 $\left(\cos\frac{4\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{4\pi}{3}\right)$，并且依次称这两种结点为第一类结点与第二类结点.

不难验证，在每个结点处，不论是第一类还是第二类结点，从球外正视该点时，依顺时针向选取与此结点相连的两条相结线缝时，后一条线缝上放置的数与前一条线缝上所放置的数的比值都恰好等于在该结点处所放置的数.

于是，在此 MO 牌足球的任一个多边形皮块上，如果将其边界线缝上所放置的复数依逆时针方向依次记为 $z_1,z_2,\cdots,z_m$，则其各个结点，即此多边形顶点上所放置的复数恰好依次是

$$\frac{z_2}{z_1},\frac{z_3}{z_2},\cdots,\frac{z_m}{z_{m-1}},\frac{z_1}{z_m}$$

显然有

$$\frac{z_2}{z_1}\cdot\frac{z_3}{z_3}\cdot\cdots\cdot\frac{z_m}{z_{m-1}}\cdot\frac{z_1}{z_m}=1$$

第7届中国数学奥林匹克

北京,1992

1 设方程

$$x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0$$

的系数都是实数,且适合条件

$$0<a_0\leqslant a_1\leqslant\cdots\leqslant a_{n-1}\leqslant 1$$

已知λ为此方程的复数根,且适合条件$|\lambda|\geqslant 1$.试证:$\lambda^{n+1}=1$.

证明 由条件可知$\lambda\neq 0,1$.考虑

$$0=(\lambda-1)(\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0)=$$
$$\lambda^{n+1}+(a_{n-1}-1)\lambda^n+(a_{n-2}-a_{n-1})\lambda^{n-1}+\cdots+$$
$$(a_0-a_1)\lambda-a_0$$

于是 $$\lambda^{n+1}=(1-a_{n-1})\lambda^n+(a_{n-1}-a_{n-2})\lambda^{n-1}+\cdots+$$
$$(a_1-a_0)\lambda+a_0$$

其中右式系数都是非负实数.因此

$$|\lambda|^{n+1}=|(1-a_{n-1})\lambda^n+(a_{n-1}-a_{n-2})\lambda^{n-1}|+\cdots+$$
$$(a_1-a_0)\lambda+a_0|\leqslant$$
$$(1-a_{n-1})|\lambda|^n+(a_{n-1}-a_{n-2})|\lambda|^{n-1}+\cdots+$$
$$(a_1-a_0)|\lambda|+a_0$$

由假设$|\lambda|\geqslant 1$,所以有

$$|\lambda|^{n+1}\leqslant|(1-a_{n-1})|\lambda|^n+(a_{n-1}-a_{n-2})|\lambda|^n+\cdots+$$
$$(a_1-a_0)|\lambda|^n+a_0|\lambda|^n$$

这证明$|\lambda|\leqslant 1$.而由假设$|\lambda|\geqslant 1$,可知$|\lambda|=1$.因此,上面不等式变为等式.所以有如下辐角关系

$$\arg(1-a_{n-1})\lambda^n=\arg(a_{n-1}-a_{n-2})\lambda^{n-1}=\cdots=$$
$$\arg(a_1-a_0)\lambda=\arg a_0=0$$

因此 $$(1-a_{n-1})\lambda^n\geqslant 0$$
$$(a_{n-1}-a_{n-2})\lambda^{n-1}\geqslant 0,\cdots,(a_1-a_0)\lambda\geqslant 0$$

从而 $$\lambda^{n+1}=(1-a_{n-1})\lambda^n+\cdots+a_0\geqslant 0$$

所以 $$\lambda^{n+1}=|\lambda^{n+1}|=|\lambda|^{n+1}=1$$

2 设 $x_1,\cdots,x_n$ 为非负实数. 记 $x_{n+1}=x_1,a=\min\{x_1,\cdots,x_n\}$. 试证:

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{1+x_j}{1+x_{j+1}}\leqslant n+\frac{1}{(1+a)^2}\sum_{j=1}^{n}(x_j-a)^2$$

且证等式成立当且仅当 $x_1=\cdots=x_n$.

证明 设 $y_1,\cdots,y_n$ 为 $x_1,\cdots,x_n$ 的一个排列, 且 $0\leqslant y_1\leqslant y_2\leqslant\cdots\leqslant y_n$. 于是, $1\leqslant 1+y_1\leqslant 1+y_2\leqslant\cdots\leqslant 1+y_n$. 由排序不等式, 有

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{1+x_j}{1+x_{j+1}}\leqslant\sum_{j=1}^{n}\frac{1+y_j}{1+y_{n-j+1}}$$

只要能证得

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{1+y_j}{1+y_{n-j+1}}\leqslant n+\frac{1}{(1+a)^2}\sum_{j=1}^{n}(y_j-a)^2$$

即可. 由于

$$\frac{1+y_j}{1+y_{n-j+1}}+\frac{1+y_{n-j+1}}{1+y_j}-2=$$

$$\frac{(y_j-y_{n-j+1})^2}{(1+y_j)(1+y_{n-j+1})}\leqslant\frac{(y_j-y_{n-j+1})^2}{(1+a)^2}$$

所以 $$\sum_{j=1}^{n}\frac{1+y_j}{1+y_{n-j+1}}\leqslant n+\frac{1}{(1+a)^2}\sum_{j=[\frac{n}{2}]}^{n}(y_j-a)$$

因此 $$\sum_{j=1}^{n}\frac{1+x_j}{1+x_{j+1}}\leqslant n+\frac{1}{(1+a)^2}\sum_{j=1}^{n}(x_j-a)^2$$

又等号成立当且仅当 $y_j=y_{n-j+1}$ 或 $y_j\neq y_{n-j+1},(1+a)^2=(1+y_j)(1+y_{n-j+1})$. 由 $a\leqslant y_j,y_{n-j+1}$ 有

$$y_j=y_{n-j+1}=a,j=1,2,\cdots,n$$

这证明了 $y_j=\cdots=y_n=a$, 即 $x_1=\cdots=x_n=a$.

3 在平面上画出一个 9×9 的方格表, 在这些小方格的每一格中都任意填入 +1 或 -1. 下面一种改变填入数字的方式称为作一次变动: 对任意一个小方格, 凡与此小方格有一条公共边的所有小方格(不包含此格本身) 中的数作连乘积, 于是每取一格, 就算出一个数. 在所有小格都取遍后, 再将这些算出的数放入相应的小方格中. 试问是否总可以经过有限次变动, 使得所有小方格中的数都变为 1?

解 容易验证, 图 1 中三个数表在上述变动下都是不变的.

	-1		-1
-1	-1		-1
	-1		
		-1	-1

(a)

	-1	-1	-1
-1		-1	
-1	-1		
-1			

(b)

	-1	-1	
-1			-1
-1			-1
	-1	-1	

(c)

图 1

其中没写数的格中都填 + 1.

将 9 × 9 方格表的中间一行和中间一列的所有方格都填入 + 1,然后在余下的四个 4 × 4 方格表中对称地填入上面三个数表中的一个,即得到在规定操作下不变的 9 × 9 数表,如图 2 所示.

由此可见,此题的答案是否定的.

	-1	-1	-1		-1	-1	-1	
-1		-1				-1		-1
-1	-1						-1	-1
-1								-1
-1								-1
-1	-1						-1	-1
-1		-1				-1		-1
	-1	-1	-1		-1	-1	-1	

图 2

4 凸四边形 $ABCD$ 内接于圆 O,对角线 AC 与 BD 相交于 P. $\triangle ABP$,$\triangle CDP$ 的外接圆相交于 P 和另一点 Q,且 O,P,Q 三点两两不重合.试证:$\angle OQP = 90°$.

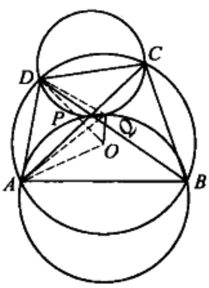


图 1

证法 1 如图 1,联结 AO,AQ,DO,DQ,易知

$$\angle DQA = \angle DQP + \angle PQA = \angle DCP + \angle ABP = 2\angle ABD$$

$$\angle AOD = 2\angle ABD$$

于是
$$\angle DQA = \angle AOD$$

从而,A,O,Q,D 四点共圆.又

$$\angle AQO = \angle ADO = 90° - \frac{1}{2}\angle AOD = 90° - \angle ABD$$

$$\angle AQP = \angle ABD$$

所以
$$\angle OQP = \angle AQO + \angle AQP = 90°$$

证法 2 如图 2,O_1,O_2 分别是 $\triangle ABP$ 和 $\triangle PCD$ 的外心.联结 O_2P 并延长交 AB 于 H.联结 O_2D.于是

$$\angle BPH = \angle O_2PD = 90° - \frac{1}{2}\angle DO_2P =$$
$$90° - \angle DCP = 90° - \angle ABD$$

从而 $\angle PHB = 90°$,即 $O_2P \perp AB$.又 $OO_1 \perp AB$,故 $OO_1 /\!/ O_2P$.

同理 $O_2O /\!/ O_1P$.因而,O_1OO_2P 是平行四边形,E 是 OP 的中点.

又 F 是 PQ 的中点,故 $EF /\!/ OQ$,即 $O_1O_2 /\!/ OQ$.

但 $O_2O_1 \perp PQ$,故 $OQ \perp PQ$,即 $\angle OQP = 90°$.

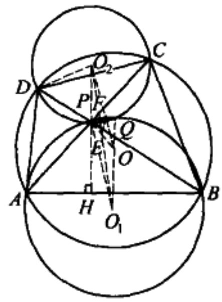
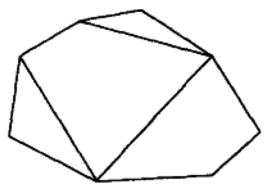


图 2

5 在有八个顶点的简单图中,没有四边形的图的边数的最大值是多少?(简单图是指任一点与自己没有边相连,而且任何两个点之间如果有边相连,就只有一条边相连的图)

解 图1是有八个顶点,十一条边的简单图,其中没有四边形.


图 1

下面证11即是所要求的最大值.为此,只要证明有十二条边的图中必有四边形.先指出几个事实:

(1) 设点 A 与点 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 都有边相连,又 B 是与 A 不同的顶点(B 可以是 $\{A_1, A_2, \cdots, A_k\}$ 中点),如果 B 与 $\{A_1, A_2, \cdots, A_k\}$ 中的两个点有边相连,则图中有四边形.

(2) 四个顶点的图中如果有五条边,就必定有四边形.

设 G 是有八个顶点,十二条边的简单图,下证 G 必有四边形.用反证法,即设 G 没有四边形.用 $d_1, d_2, \cdots, d_8$ 表示 G 的八个顶点的度数,由于

$$\sum_{i=1}^{8} d_i = 2 \times 12 = 24, \max(d_1, d_2, \cdots, d_8) \geq 3$$

以下分三种情况讨论.

i $\max(d_1, d_2, \cdots, d_8) = 3$.这时,$G$ 的每一个顶点的度数都是3.任取一个顶点 A,与 A 有边相连的顶点设为 A_1, A_2, A_3,其余四个顶点为 B_1, B_2, B_3, B_4.由(1),$\{B_1, B_2, B_3, B_4\}$ 中点与 $\{A_1, A_2, A_3\}$ 中点相连的边至多只有四条.而 $\{A_1, A_2, A_3\}$ 中点相连的边至多只有一条,所以,在 $\{B_1, B_2, B_3, B_4\}$ 这些点中相连的边至少有 $12 - 3 - 4 - 1 = 4$ 条(由(2)可知也只有四条).我们只考虑这四个顶点及联结它们的四条边.这时,其中必有某一顶点的度数是1(如这四个点度数都是2,就成为一个四边形).从而有顶点度数为3,即 $\{B_1, B_2, B_3, B_4\}$ 中必有一点(不妨设为 B_1)与其他三点 B_2, B_3, B_4 都有边相连.而 $\{B_1, B_2, B_3, B_4\}$ 中的点与 $\{A_2, A_3, A_4\}$

中的点相连的边数为 4, B_1 必与 $\{A_2, A_3, A_4\}$ 中某一点有边相连. 这样, 在图 G 中, B_1 的度数将是 4, 与假设矛盾.

ii $\max(d_1, \cdots, d_8) = 4$. 取一个度数为 4 的顶点 A, 设与 A 有边相连的顶点为 A_1, A_2, A_3, A_4, 其余三个顶点为 B_1, B_2, B_3. 由 (1) $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ 中的点相连的边至多是 2 条, 将 $\{B_1, B_2, B_3\}$ 中点与 $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ 中点相连的边至多是 3 条, 而 $\{B_1, B_2, B_3\}$ 中的点相连的边显然至多是 3 条. 由于总的边数是 12 条, 因此上述的各种边数恰为 2,3,3. 于是, $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ 中点相连的边有 2 条, 不妨设为 A_1A_2 及 A_3A_4(这两条边不会有公共顶点, 否则将出现四边形). $\{B_1, B_2, B_3\}$ 中每一点都与 $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ 中某一点有边相连, B_1B_2, B_1B_3, B_2B_3 都是 G 中的边. 由于 $\{B_1, B_2, B_3\}$ 都与 $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ 中某一点相连, 因此至少有两个点与 $\{A_1, A_2\}$ 或 $\{A_3, A_4\}$ 中某一点相连, 不妨设 $\{B_1, B_2, B_3\}$ 中有两点 B_1, B_2 与 $\{A_1, A_2\}$ 中点有边相连. 这时, 如果 B_1, B_2 都与同一点(设为 A_1)相连, $A_1B_1B_3B_2$ 是个四边形, 如果 B_1, B_2 与 $\{A_1, A_2\}$ 中不同的点分别有边相连, 则因为 A_1A_2, B_1B_2 都是边, 仍有四边形, 与假设矛盾.

iii $\max(d_1, \cdots, d_8) > 4$. 取一个度数最大的顶点 A, 与 A 有边相连的顶点集记为 S, 其余顶点集记为 T.

$$|S| = \max(d_1, \cdots, d_8)$$

T 中的点与 S 中的点相连的边数至多有 $|T|$ 条, T 中点相连的边数至多有 $C_{|T|}^2$ 条, S 中点相连的边至多有 $\left[\frac{|S|}{2}\right]$ 条. 这样, 图中的边数不超过

$$|S| + |T| + C_{|T|}^2 + \left[\frac{|S|}{2}\right] = 7 + C_{|T|}^2 + \left[\frac{|S|}{2}\right]$$

当 $|S| = 5,6,7$ 时, 都不可能使边数为 12.

综上所述, 即知所求的最大值为 11.

6 已知整数列 $\{a_0, a_1, a_2, \cdots\}$ 满足

(1) $a_{n+1} = 3a_n - 3a_{n-1} + a_{n-2}, n = 2,3,\cdots$;

(2) $2a_1 = a_0 + a_2 - 2$;

(3) 对任意自然数 m, 在数列 $\{a_0, a_1, a_2, \cdots\}$ 中必有相继的 m 项 $a_k, a_{k+1}, \cdots, a_{k+m-1}$ 都是完全平方数.

求证: $\{a_0, a_1, a_2, \cdots\}$ 的所有项都是完全平方数.

证明 由(1)知, 对任何 $n \geqslant 2$ 有

$$a_{n+1} - a_n = 2(a_n - a_{n-1}) + a_{n-1} - a_{n-2}$$

记 $d_n = a_n - a_{n-1}, n = 1,2,\cdots$, 则

$$d_{n+1}-d_n=d_n-d_{n-1}=\cdots=d_2-d_1$$

由(2)得

$$d_2-d_1=a_2-2a_1+a_0=2$$

所以 $$a_n=a_0+\sum_{k=1}^{n}d_k=a_0+nd+n(n-1)$$

即 $$a_n=n^2+bn+c,n=0,1,2,\cdots$$

其中 $$b=a_1-a_0-1,c=a_0$$

以下对所要结果给出两种证法.

证法1 由(3)知,存在非负整数 t 使得 a_t 和 a_{t+2} 都是完全平方数.从而

$$a_{t+2}-a_t\not\equiv 2(\bmod 4)$$

又 $$a_{t+2}-a_t=4t+4+2b$$

所以 b 是偶数,令 $b=2\lambda$,则

$$a_n=(n+\lambda)^2+c-\lambda^2$$

可以证明 $c-\lambda^2=0$,从而

$$a_n=(n+\lambda)^2,n=0,1,2,\cdots$$

事实上,反设 $c-\lambda^2\neq 0$,则它的不同约数只有有限多个,其个数设为 m,由通项公式可知,存在 n_0 使得当 $n\geqslant n_0$ 时,数列 $\{a_n\}$ 严格单增.由假设(3),存在 $k\geqslant n_0$,使得

$$a_{k+i}=p_i^2,i=0,1,2,\cdots,m$$

其中 p_i 是非负整数,且 $p_0<p_1<p_2<\cdots<p_m$.由此可知

$$c-\lambda^2=p_i^2-(k+i+\lambda)^2=$$
$$(p_i-k-i-\lambda)(p_i+k+i+\lambda),i=0,1,2,\cdots,m$$

矛盾.

证法2 由于 $a_n=n^2+bn+c$,从而存在 n_0 使得当 $n\geqslant n_0$ 时数列 $\{a_n\}$ 严格单增.

$$0<\left(n-\frac{|b|+1}{2}\right)^2\leqslant a_n\leqslant\left(n+\frac{|b|+1}{2}\right)^2$$

于是 $$0<\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_n}=\frac{a_{n+1}-a_n}{\sqrt{a_{n+1}}+\sqrt{a_n}}<$$
$$\frac{2n+1+b}{2\sqrt{a_n}}\leqslant\frac{2n+1+b}{2n-|b|-1}$$

由此可知,存在 $n_1\geqslant n_0$,使得当 $n\geqslant n_1$ 时

$$0<\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_n}<2$$

利用假设(3),易知存在 $k\geqslant n_1$,使得 a_k 和 a_{k+1} 都是完全平方数.所以,$\sqrt{a_{k+1}}-\sqrt{a_k}=1$.记 $\sqrt{a_k}=t$,由通项公式可得

$$a_{n+1}=2a_n-a_{n-1}+2,n=1,2,\cdots$$

所以
$$a_{k+2}=2(t+1)^2-t^2+2=(t+2)^2$$
$$a_{k-1}=2t^2-(t+1)^2+2=(t-1)^2$$

于是,用归纳法易证数列$\{a_0,a_1,a_2,\cdots\}$的所有项都是完全平方数.

第8届中国数学奥林匹克

济南,1993

1 设 n 是奇数,试证明:存在 $2n$ 个整数 $a_1,a_2,\cdots,a_n;b_1,b_2,\cdots,b_n$,使得对任意一个整数 k,$0<k<n$,下列 $3n$ 个数

$$a_i+a_{i+1},a_i+b_i,b_i+b_{i+k}$$

(其中 $i=1,2,\cdots,n,a_{n+1}=a_1,b_{n+j}=b_j,0<j<n$)

被 $3n$ 除时所得余数互不相同.

证明 下面的 $2n$ 个数是满足题设的

$$a_1=1,a_2=4,\cdots,a_n=3n-2$$

$$b_1=2,b_2=5,\cdots,b_n=3n-1$$

(1) 对于满足 $1\leqslant i\leqslant n,1\leqslant k\leqslant n-1$ 的整数 i,k,都有 $a_i+a_{i+1}\equiv 2(\bmod 3),a_i+b_i\equiv 0(\bmod 3),b_i+b_{i+k}\equiv 1(\bmod 3)$.故不存在不同的 i_1,i_2,i_3 及 k 使下面的任一式成立

$$a_{i_1}+a_{i_1+1}\equiv a_{i_2}+b_{i_2}(\bmod 3n)$$

$$a_{i_1}+a_{i_1+1}\equiv a_{i_3}+b_{i_3+k}(\bmod 3n)$$

$$a_{i_2}+b_{i_2}\equiv b_{i_3}+b_{i_3+k}(\bmod 3n)$$

(2) 若存在不同的 i_1,i_2,使

$$b_{i_1}+b_{i_1+k}\equiv b_{i_2}+b_{i_2+k}(\bmod 3n)$$

则

$$b_{i_1}+b_{i_1}+3k\equiv b_{i_2}+b_{i_2}+3k(\bmod 3n)$$

$$2b_{i_1}\equiv 2b_{i_2}(\bmod 3n)$$

因 n 为奇数,$(2,3n)=1$,故

$$b_{i_1}\equiv b_{i_2}(\bmod 3n)$$

因 $0<b_{i_1},b_{i_2}<3n$,故 $b_{i_1}=b_{i_2},i_1=i_2$,与 $i_1\neq i_2$ 矛盾,故对任不同的 i_1,i_2,k 有

$$b_{i_1}+b_{i_1+k}\not\equiv b_{i_2}+b_{i_2+k}(\bmod 3n)$$

(3) 类似(2)可证,对不同的 i_1,i_2 有

$$a_{i_1}+a_{i_1+1}\not\equiv a_{i_2}+a_{i_2+1}(\bmod 3n)$$

(4) 若存在不同的 i_1,i_2 使

$$a_{i_1}+b_{i_1}\equiv a_{i_2}+b_{i_2}(\bmod 3n)$$

则
$$a_{i_1}+a_{i_1}+1\equiv a_{i_2}+a_{i_1}+1 \pmod{3n}$$
则
$$2a_{i_1}\equiv 2a_{i_2} \pmod{3n}$$
则 $i_1=i_2$,矛盾,故对不同的 i_1,i_2,有
$$a_{i_1}+b_{i_1}\not\equiv a_{i_2}+b_{i_2} \pmod{3n}$$

2 给定 $K\in\mathbf{N}$ 及实验 $a>0$,在下列条件
$$k_1+k_2+\cdots+k_r=k,k_i\in\mathbf{N},1\leqslant r\leqslant k$$
下,求 $a^{k_1}+a^{k_2}+\cdots+a^{k_r}$ 的最大值.

解 任 $k_1,k_2\in\mathbf{N}$,因
$$a^{k_1+k_2-1}+a-a^{k_1}-a^{k_2}=a(a^{k_1-1}-1)(a^{k_2-1}-1)\geqslant 0$$
(当 $a>1$ 时,$a^{k_1-1}-1\geqslant 0,a^{k_2-1}-1\geqslant 0$;当 $0<a\leqslant 1$ 时,$a^{k_1-1}-1\leqslant 0,a^{k_2-1}-1\leqslant 0$),故
$$a^{k_1}+a^{k_2}\leqslant a+a^{k_1+k_2-1}$$
故
$$a^{k_1}+a^{k_2}+\cdots+a^{k_r}\leqslant a+a^{k_1+k_2-1}+a^{k_3}+\cdots+a^{k_r}\leqslant 2a+a^{k_1+k_2+k_3-2}+a^{k_4}+\cdots+a^{k_r}\leqslant\cdots\leqslant(r-1)a+a^{k-r+1}$$
且在 $k_1=k_2=\cdots=k_{r-1}=1,k_r=k-r+1$ 时,取得 $(r-1)a+a^{k-r+1}$.故所求最大值为
$$(r-1)a+a^{k-r+1}$$

3 设圆 K 和 K_1 同心,它们的半径分别为 R 和 $R_1,R_1>R$.四边形 $ABCD$ 内接于圆 K,四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 内接于圆 K_1,点 A_1,B_1,C_1,D_1 分别在射线 CD,DA,AB,BC 上,求证:
$$\frac{S_{A_1B_1C_1D_1}}{S_{ABCD}}\geqslant\frac{R_1^2}{R^2}$$

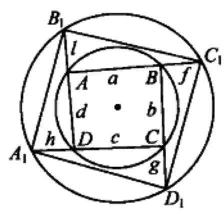


图 1

证明 如图 1,为方便起见,令 $AB=a,BC=b,CD=c,DA=d,AB_1=l,BC_1=f,CD_1=g,DA_1=h$,则
$$S_{\triangle AB_1C_1}=\frac{1}{2}(a+f)l\sin\angle B_1AC_1$$
$$S_{ABCD}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle BDC}=\frac{1}{2}ad\sin\angle DAB+\frac{1}{2}bc\sin\angle DCB=\frac{1}{2}(ad+bc)\sin\angle DAB=\frac{1}{2}(ad+bc)\sin\angle B_1AC_1$$

故 $$\frac{S_{\triangle AB_1C_1}}{S_{ABCD}}=\frac{(a+f)l}{ad+bc}=\frac{l(l+d)}{ad+bc}\cdot\frac{a+f}{l+d}=\frac{R_1^2-R^2}{ad+bc}\cdot\frac{a+f}{l+d}$$

同理 $$\frac{S_{\triangle BC_1D_1}}{S_{ABCD}}=\frac{R_1^2-R^2}{ab+cd}\cdot\frac{b+g}{a+f}$$
$$\frac{S_{\triangle CD_1A_1}}{S_{ABCD}}=\frac{R_1^2-R^2}{ad+bc}\cdot\frac{c+h}{b+g}$$
$$\frac{S_{\triangle DA_1B_1}}{S_{ABCD}}=\frac{R_1^2-R^2}{ab+cd}\cdot\frac{l+d}{c+h}$$

将上面四式相加,并应用算术 - 几何平均值不等式得
$$\frac{S_{A_1B_1C_1D_1}-S_{ABCD}}{S_{ABCD}}\geqslant 4(R_1^2-R^2)\sqrt{\frac{1}{(ad+bc)(ab+cd)}}$$

由于 $ABCD$ 内接于半径为 R 的圆,故
$$a+b+c+d\leqslant 4\sqrt{2}R$$

故 $$\sqrt{(ad+bc)(ab+cd)}\leqslant\frac{ad+bc+ab+cd}{2}=\frac{(a+c)(b+d)}{2}\leqslant\frac{1}{2}\,\frac{(a+b+c+d)^2}{4}\leqslant 4R^2$$

故 $$\frac{S_{A_1B_1C_1D_1}}{S_{ABCD}}\geqslant 4(R_1^2-R^2)\frac{1}{4R^2}+1=\frac{R_1^2}{R^2}$$

4 给定集 $S=\{z_1,z_2,\cdots,z_{1\,993}\}$,其中 $z_1,z_2,\cdots,z_{1\,993}$ 是非零复数(可看做平面上的非零向量).求证:可以把 S 中的元素分成若干组,使得

(1) S 中的每个元素属于且仅属于其中的一组;

(2) 每一组中任一复数与该组所有复数之和的夹角不超过 90°;

(3) 将任意两组中复数分别求和,所得和数之间的夹角大于 90°.

证明 由于集 S 的子集个数是有限的,所以必有一个子集 A,使 A 中所有向量的和的模长是各子集中最大的(若最大的不止一个,则任取其中一个).设 A 中所有向量的和为 $\boldsymbol{a}$,旋转坐标轴,使 $\boldsymbol{a}$ 在 y 轴的正方向上,则 A 必是 S 中所有位于上半平面的向量构成的集(在旋转坐标轴后看).其理由为:若有向量 $\boldsymbol{p}$ 位于上半平面,但 $\boldsymbol{p}\notin A$,则 $A\cup\{\boldsymbol{p}\}$ 中所有向量之和在 y 轴上的分量即已大

于 $|a|$,模长自然更大于 $|a|$,与 A 的取法矛盾.类似地,若有向量 q 在下半平面,但 $q\in A$,则 $A-\{q\}$ 的向量和的模也将大于 $|a|$,矛盾.故 A 恰为 S 中位于上半平面的向量组成的集合.

这样,$S-A$ 恰是 S 中位于下半平面的向量的集合,在 $S-A$ 的所有子集中必有一个子集 B,使 B 中向量和的模长最大,设其向量和为 b,作直线 l 垂直于 b,则 B 恰是所有 S 中位于 x 轴与 l 直线夹成之锐角区域内的向量的集合,理由与上面类似.设 $C=S-A-B$,则 C 恰是 l 与 x 轴夹成之锐角区域内 S 的向量的集合.

显然,A,B,C 符合题设条件.

5 10 人到书店买书,已知

(1) 每人都买了三种书;

(2) 任何两人所买的书,都至少有一种相同.

问购买人数最多的一种书最少有几人购买?说明理由.

解　设共卖出 m 种书,每种书分别有 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 个人购买,设购买人最多的一种书有 x 人购买.则有

$$\sum_{i=1}^{m}x_i=30,x_i\leqslant x,i=1,2,\cdots,m$$

考查每两人之间的同种书对的总数,有

$$C_{10}^2\leqslant\sum_{i=1}^{m}C_{x_i}^2$$

故
$$45\leqslant\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}x_i(x_i-1)\leqslant\frac{x-1}{2}\sum_{i=1}^{m}x_i=15(x-1)$$

故
$$x\geqslant 4$$

若 $x=4$,则 $x_i=4,i=1,2,\cdots,m$,则 $4\mid(\sum\limits_{i=1}^{m}x_i)$,即 $4\mid 30$,矛盾,故 $x\geqslant 5$,即购买人数最多的一种书至少有 5 人购买.

另一方面,存在购买人数最多的一种书恰有 5 个人购买的情形:记 A_i 为不同种的书,$i=1,2,\cdots,6$. 10 个人购书情形如下

$\{A_1,A_2,A_3\},\{A_1,A_6,A_2\},\{A_2,A_4,A_3\},\{A_3,A_5,A_1\}$

$\{A_1,A_6,A_4\},\{A_1,A_5,A_4\},\{A_2,A_4,A_5\}$

$\{A_2,A_6,A_5\},\{A_3,A_5,A_6\},\{A_3,A_4,A_5\}$

故购买人数最多的一种书最少有 5 人购买.

6 设函数 $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ 满足对任意的 $x>0$, $y>0$, $f(xy)\leqslant f(x)f(y)$.

试证:对任意的 $x>0, n\in\mathbf{N}$,有

$$f(x^n)\leqslant f(x)f(x^2)^{\frac{1}{2}}\cdots f(x^n)^{\frac{1}{n}}$$

证明 令 $F_n(x)=f(x)f(x^2)^{\frac{1}{2}}\cdots f(x^n)^{\frac{1}{n}}$,则只须证 $f(x^n)\leqslant F_n(x)$。因

$$(F_n(x))^n=(F_{n-1}(x))^n f(x^n)$$
$$(F_{n-1}(x))^{n-1}=(F_{n-2}(x))^{n-1}f(x^{n-1})$$
$$\vdots$$
$$F_2(x)^2=F_1(x)^2f(x)^2$$
$$F_1(x)=f(x)$$

将以上等式两边分别相乘化简得

$$(F_n(x))^n=F_{n-1}(x)F_{n-2}(x)\cdots F_1(x)f(x)f(x^2)\cdots f(x^n)$$

利用该式,以下用数学归纳法证明 $f(x^n)\leqslant F_n(x)$ 对一切 $n\in\mathbf{N}$ 成立.

$n=1$ 时,$F_1(x)=f_1(x)$,故命题成立.

假设 $n\leqslant k$ 时命题成立,即

$$f(x^i)\leqslant F_i(x), i=1,2,\cdots,k$$

则 $n=k+1$ 时,有

$(F_{k+1}(x))^{k+1}=F_k(x)F_{k-1}(x)\cdots F_1(x)f(x)f(x^2)\cdots f(x^{k+1})\geqslant$
$f(x^k)f(x^{k-1})\cdots f(x)f(x)f(x^2)\cdots f(x^{k+1})=$
$f(x^{k+1})(f(x^k)f(x))(f(x^{k-1})f(x^2))\cdots(f(x)f(x^k))\geqslant$
$f(x^{k+1})f(x^{k+1})f(x^{k-1+2})\cdots f(x^{1+k})=$
$(f(x^{k+1}))^{k+1}$

故 $$F_{k+1}(x)\geqslant f(x^{k+1})$$

完成数学归纳证明.

第9届中国数学奥林匹克

上海，1994

1 设 $ABCD$ 是一个梯形（$AB \parallel CD$），E 是线段 AB 上一点，F 是线段 CD 上一点，线段 CE 与 BF 相交于点 H，线段 ED 与 AF 相交于点 G.

求证：$S_{EHFG} \leqslant \frac{1}{4} S_{ABCD}$.

如果 $ABCD$ 是一个任意凸四边形，同样结论是否成立？请说明理由.

证明 如图1，联结 EF. 在梯形 $AEFD$ 中，显然有

$$\sin \angle AGD = \sin \angle DGF = \sin \angle EGF = \sin \angle AGE \quad ①$$

$$S_{\triangle AGD} = S_{\triangle AED} - S_{\triangle AEG} = S_{\triangle AEF} - S_{\triangle AEG} = S_{\triangle EGF} \quad ②$$

由①和②，有

$$(S_{\triangle EGF})^2 = S_{\triangle EGF} \cdot S_{\triangle AGD} =$$

$$\left(\frac{1}{2} EG \cdot GF \sin \angle EGF\right)\left(\frac{1}{2} AG \cdot GD \sin \angle AGD\right) =$$

$$\left(\frac{1}{2} EG \cdot AG \sin \angle AGE\right)\left(\frac{1}{2} GF \cdot GD \sin \angle DGF\right) =$$

$$S_{\triangle AGE} \cdot S_{\triangle DGF} \quad ③$$

由②和③，有

$$S_{AEFD} = S_{\triangle AGE} + S_{\triangle EGF} + S_{\triangle DGF} + S_{\triangle AGD} =$$

$$2S_{\triangle EGF} + (S_{\triangle AGE} + S_{\triangle DGF}) \geqslant$$

$$2S_{\triangle EGF} + 2\sqrt{S_{\triangle AGE} \cdot S_{\triangle DGF}} =$$

$$4S_{\triangle EGF} \quad ④$$

类似地，有

$$S_{BEFC} \geqslant 4S_{\triangle EHF} \quad ⑤$$

④加⑤，再乘以 $\frac{1}{4}$，有

$$\frac{1}{4} S_{ABCD} \geqslant S_{EHFG} \quad ⑥$$

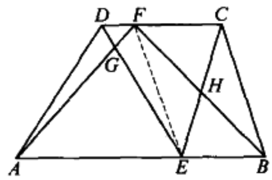


图1

对于后半题，如果 $ABCD$ 是一个任意凸四边形，结论不一定成立. 举一反例如下：

作一个梯形 $ABCD$，$BC \parallel AD$，$AD = 1$，$BC = 100$，梯形高 $h =$

100,在 AB 上取一点 E,作 $EF \parallel BC$,交线段 CD 于点 F,如图2所示.已知线段 EF 与 BC 之间的距离为1.

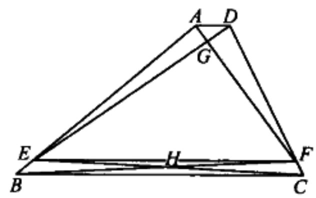


图2

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD + BC)h = 5\ 050 \quad ⑦$$

$$EF = \frac{1}{100}(99BC + AD) = 99.01 \quad ⑧$$

点 G 到线段 EF 的距离记为 h^*,显然

$$\frac{h^*}{99 - h^*} = \frac{EF}{AD} = 99.01 \quad ⑨$$

从而

$$h^* = \frac{99 \times 99.01}{100.01} \quad ⑩$$

那么

$$S_{EHFG} > S_{\triangle EFG} = \frac{1}{2}EF \cdot h^* = \frac{99 \times (99.01)^2}{200.02} > \frac{1}{4} \times 5\ 050 = \frac{1}{4}S_{ABCD} \quad ⑪$$

② $n(n \geqslant 4)$ 个盘子里放有总数不少于4的糖块,从任选的两个盘子中各取一块糖,放入另一个盘子中去,称为一次操作.问能否经过有限次操作,把所有糖块集中到一个盘子里去?证明你的结论.

解 能经过有限次操作,把所有糖块集中到一个盘子里去,对糖块总数 $m(m \geqslant 4)$ 进行归纳.

当 $m = 4$ 时,盛有糖块的盘子不多于4个.去掉 $n-4$ 个空盘,在剩下4个盘子里,糖块分布有以下4种情况要考虑:

(1) (1,1,1,1)　　(2)(1,2,1,0)

(3) (2,2,0,0)　　(4)(1,3,0,0)

对于第一种情况,可进行如下几次操作,使糖块集中到一个盘子里:

$(1,1,1,1) \to (3,1,0,0) \to (2,0,2,0) \to (1,0,1,2) \to (0,0,0,4)$

从上述操作可以看到:对于第二、三、四种情况,糖块亦能集中到一个盘子里.

假设当 $m = k(k \geqslant 4)$ 时,所有糖块能够集中到一个盘子里.

当 $m = k+1(k \geqslant 4)$ 时,在盛糖块的一个盘子里固定一块糖,暂不去考虑它.对于剩下的 $k(k \geqslant 4)$ 块糖,利用数学归纳法,可知这 k 块糖是能够集中到一个盘子里的.如果这个盘子恰是盛有固定糖块的盘子,则结论已经成立.否则,恰有两个盘子盛有糖块,一个盘子里只有一块糖,另一个盘子里有 k 块糖.再取两个空盘,

进行如下的操作：

$$(1,k,0,0)\to(0,k-1,2,0)\to(0,k-2,1,2)\to$$
$$(2,k-3,0,2)\to(1,k-1,0,1)\to(0,k+1,0,0)$$

所有糖块在一个盘子里了. 结论成立.

3 求适合以下条件的所有函数 $f:[1,+\infty)\to[1,+\infty)$.

(1) $f(x)\leqslant 2(x+1)$;

(2) $f(x+1)=\dfrac{1}{x}((f(x))^2-1)$.

解 $\forall x\geqslant 1$①, 令

$$g(x)=f(x)-(x+1) \quad ①$$

利用题目条件, $\forall x\geqslant 1$, 有

$$-x\leqslant g(x)\leqslant x+1 \quad ②$$

显然, $\forall x\geqslant 1$.

$$\begin{aligned}g(x+1)&=f(x+1)-(x+2)=\\&\frac{1}{x}((f(x))^2-1)-(x+2)=\\&\frac{1}{x}((g(x)+x+1)^2-1)-(x+2)=\\&\frac{1}{x}((g(x)+x+1)^2-1-x(x+2))=\\&\frac{1}{x}g(x)(g(x)+2(x+1))\end{aligned} \quad ③$$

下面证明对于 $\forall x\geqslant 1$, 有

$$g(x)=0 \quad ④$$

用反证法, 如果存在 $x_0\geqslant 1$, 使得 $g(x_0)>0$, 那么, 由 ③ 有

$$\begin{aligned}g(x_0+1)&=\frac{1}{x_0}g(x_0)(g(x_0)+2(x_0+1))>\\&\frac{x_0+2}{x_0}g(x_0)\end{aligned} \quad ⑤$$

现在, 用数学归纳法证明: $\forall k\in\mathbf{N}_+$ ($\mathbf{N}_+$ 为正整数全体组成的集合), 有

$$g(x_0+k)>\frac{(x_0+k)(x_0+k+1)}{x_0(x_0+1)}g(x_0) \quad ⑥$$

当 $k=1$ 时, 由 ⑤ 可得 ⑥. 设对某 $k\in\mathbf{N}_+$, ⑥ 成立. 则 $g(x_0+k)>0$. 考虑 $k+1$ 情况, 在 ③ 中, 令 $x=x_0+k$, 有

$$g(x_0+k+1)=\frac{1}{x_0+k}g(x_0+k)(g(x_0+k)+2(x_0+k+1))>$$

① $\forall$ 表示任意.

$$\frac{1}{x_0+k}g(x_0+k)(x_0+k+2) >$$

$$\frac{(x_0+k+1)(x_0+k+2)}{x_0(x_0+1)g(x_0)}g(x_0) \quad ⑦$$

上述最后一个不等式是利用归纳假设 ⑥ 得出的. 从而 ⑥ 对任意正整数 k 成立.

由于 $g(x_0) > 0$,取充分大的正整数 k,使得

$$g(x_0)\frac{(x_0+k)}{x_0(x_0+1)} > 1 \quad ⑧$$

那么,由 ⑥ 和 ⑧,有

$$g(x_0+k) > x_0+k+1 \quad ⑨$$

这与 ② 的右端不等式矛盾.

如果存在 $x_0 \geqslant 1$,使得 $g(x_0) < 0$. 类似地,由 ③ 和 ②,有

$$g(x_0+1) = \frac{1}{x_0}g(x_0)((g(x_0)+x_0)+(x_0+2)) \leqslant$$

$$\frac{x_0+2}{x_0}g(x_0) \quad ⑩$$

类似 ⑥ 的证明,可以得到 $\forall k \in \mathbf{N}_+$

$$g(x_0+k) \leqslant \frac{(x_0+k)(x_0+k+1)}{x_0(x_0+1)}g(x_0) \quad ⑪$$

由于 $g(x_0) < 0$,取很大的正整数 k,使得

$$g(x_0)\frac{(x_0+k)}{x_0(x_0+1)} < -1 \quad ⑫$$

从 ⑪ 和 ⑫,有

$$g(x_0+k) < -(x_0+k+1) \quad ⑬$$

这与 ② 的左端不等式矛盾.

于是,④ 成立. 再利用 ①, $\forall x \geqslant 1$,有

$$f(x) = x+1 \quad ⑭$$

4 已知 $f(z) = C_0z^n + C_1z^{n-1} + C_2z^{n-2} + \cdots + C_{n-1}z + C_n$ 是一个 n 次复系数多项式. 求证:一定存在一个复数 z_0, $|z_0| \leqslant 1$,并且满足 $|f(z_0)| \geqslant |C_0| + |C_n|$.

证明 令

$$\omega = \cos\frac{2\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{n}$$

取 η 是一个模长为 1 的复数. 如果 $n \geqslant 2$,对于正整数 $k = 1,2,\cdots, n-1$,有

$$f(\omega^k\eta) = C_0(\omega^k\eta)^n + C_1(\omega^k\eta)^{n-1} + C_2(\omega^k\eta)^{n-2} + \cdots +$$

$$C_{n-1}(\omega^k\eta) + C_n \qquad ①$$

上式关于 k 从 1 到 n 求和,有

$$\sum_{k=1}^{n} f(\omega^k\eta) = C_0\sum_{k=1}^{n}(\omega^k\eta)^n + C_1\sum_{k=1}^{n}(\omega^k\eta)^{n-1} + C_2\sum_{k=1}^{n}(\omega^k\eta)^{n-2} + \cdots + C_{n-1}\sum_{k=1}^{n}(\omega^k\eta) + nC_n \qquad ②$$

显然,有

$$\sum_{k=1}^{n}(\omega^k\eta)^n = n\eta^n \qquad ③$$

对于 $j = 1,2,\cdots,n-1$,利用几何级数求和公式,有

$$\sum_{k=1}^{n}(\omega^k\eta)^j = \eta^j\sum_{k=1}^{n}\omega^{kj} = \eta^j\frac{\omega^j - \omega^{(n+1)j}}{1-\omega^j} = 0 \qquad ④$$

将③,④代入②,有

$$\sum_{k=1}^{n} f(\omega^k\eta) = n(C_0\eta^n + C_n) \qquad ⑤$$

对 $n = 1$ 时,式⑤成也立.因此,式⑤对 $\forall_n \in \mathbf{N}$ 成立.由⑤,即有

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |f(\omega^k\eta)| \geqslant \frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n} f(\omega^k\eta)\right| = |C_0\eta^n + C_n| \qquad ⑥$$

记 $C_0 = \rho_0(\cos\theta_0 + \mathrm{i}\sin\theta_0)$,这里 $0 \leqslant \theta_0 < 2\pi$, $|C_0| = \rho_0$;

$$C_n = \rho_n(\cos\theta_n + \mathrm{i}\sin\theta_n)$$

这里 $0 \leqslant \theta_n < 2\pi$, $|C_n| = \rho_n$.选择 θ, $0 \leqslant \theta < 2\pi$,使得

$$\theta_0 + n\theta \equiv \theta_n \pmod{2\pi}$$

例如:当 $\theta_n \geqslant \theta_0$ 时,取

$$\theta = \frac{1}{n}(\theta_n - \theta_0)$$

当 $\theta_n < \theta_0$ 时,取

$$\theta = \frac{1}{n}(2\pi + \theta_n - \theta_0)$$

就可以了,令

$$\eta = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta \qquad ⑦$$

$$\begin{aligned} C_0\eta^n + C_n &= \rho_0(\cos\theta_0 + \mathrm{i}\sin\theta_0)(\cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta) + \\ &\quad \rho_n(\cos\theta_n + \mathrm{i}\sin\theta_n) = \\ &\quad \rho_0(\cos(\theta_0 + n\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta_0 + n\theta)) + \\ &\quad \rho_n(\cos\theta_n + \mathrm{i}\sin\theta_n) = \\ &\quad (\rho_0 + \rho_n)(\cos\theta_n + \mathrm{i}\sin\theta_n) \end{aligned} \qquad ⑧$$

从而,可以得到

$$|C_0\eta^n + C_n| = \rho_0 + \rho_n = |C_0| + |C_n| \qquad ⑨$$

将⑨代入⑥,有

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|f(\omega^k\eta)|\geqslant|C_0|+|C_n| \qquad ⑩$$

由于 n 个实数 $|f(\omega\eta)|,|f(\omega^2\eta)|,\cdots,|f(\omega^n\eta)|$ 的算术平均值大于等于 $|C_0|+|C_n|$,则至少有一个

$$|f(\omega^j\eta)|\geqslant|C_0|+|C_n| \qquad ⑪$$

这里 j 是 $1,2,\cdots,n$ 中某一个正整数.令 $z_0=\omega^j\eta$, $|z_0|=1$,而且有

$$|f(z_0)|\geqslant|C_0|+|C_n| \qquad ⑫$$

5 对任何正整数 n,求证:

$$\sum_{k=0}^{n}C_n^k2^kC_{n-k}^{[\frac{n-k}{2}]}=C_{2n+1}^n$$

其中 $C_0^0=1$, $[\frac{n-k}{2}]$ 表示 $\frac{n-k}{2}$ 的整数部分.

证法 1 考虑多项式 $(x+1)^{2n}$,它的 x^n 及 x^{n-1} 的系数和为

$$C_{2n}^n+C_{2n}^{n-1}=C_{2n+1}^n \qquad ①$$

另一方面

$$\begin{aligned}(x+1)^{2n}&=(x^2+2x+1)^n=\\&\sum_{i+j+k=n}\frac{n!}{i!j!k!}(x^2)^i(2x)^j=\\&\sum_{0\leqslant i+j\leqslant n}\frac{n!}{i!j!(n-i-j)!}2^jx^{2i+j}\end{aligned} \qquad ②$$

这里 i,j,k 均为非负整数.式 ② 右端 x^n 及 x^{n-1} 的系数之和是

$$\begin{aligned}&\sum_{\substack{0\leqslant i+j\leqslant n\\2i+j=n}}\frac{n!}{i!j!(n-i-j)!}2^j+\sum_{\substack{0\leqslant i+j\leqslant n\\2i+j=n-1}}\frac{n!}{i!j!(n-i-j)!}2^j=\\&\sum_{0\leqslant i+(n-2i)\leqslant n}\frac{n!}{i!(n-2i)!i!}2^{n-2i}+\\&\sum_{0\leqslant i+(n-1-2i)\leqslant n}\frac{n!}{i!(n-1-2i)!(i+1)!}2^{n-2i-1}=\\&\sum_{i=0}^{[\frac{n}{2}]}C_n^{2i}C_{2i}^i2^{n-2i}+\sum_{i=0}^{[\frac{n-1}{2}]}C_n^{2i+1}C_{2i+1}^i2^{n-2i-1}=\\&\sum_{\substack{k=0\\k\text{取偶数}}}^{n}C_n^k2^{n-k}C_k^{[\frac{k}{2}]}+\sum_{\substack{k=1\\k\text{取奇数}}}^{n}C_n^k2^{n-k}C_k^{[\frac{k}{2}]}=\\&\sum_{k=0}^{n}C_n^k2^{n-k}C_k^{[\frac{k}{2}]}\end{aligned} \qquad ③$$

在上式右端,令 $n-k=s$,那么,有

$$\sum_{k=0}^{n}C_n^k2^{n-k}C_k^{[\frac{k}{2}]}=\sum_{s=0}^{n}C_n^{n-s}2^sC_{n-s}^{[\frac{n-s}{2}]}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k2^kC_{n-k}^{[\frac{n-k}{2}]} \qquad ④$$

由于 $C_n^{n-s}=C_n^s$,把 s 改写为 k,可得上式最后一个等式.从而得到

所要证明的恒等式.

证法2 有$2n+1$个人,其中一位老师,n位男同学,n位女同学.老师记为T,n位男同学分别记为$a_1,a_2,\cdots,a_n$,n位女同学分别记为$b_1,b_2,\cdots,b_n$.(a_i,b_i)称为"一对",$i=1,2,\cdots,n$.现在有n个人去参加植树劳动.

有两种选人方法:

(1) $2n+1$个人中任选n人,那么有C_{2n+1}^{n}种选人方法.

(2) 固定k,这里$0\leqslant k\leqslant n$,在n对学生中任选k对,要求每对只去一人.对每个k,有$C_n^k 2^k$种选法.其余的$n-k$名同学是要一对一对地去植树的.由于一共只能去n人,所以只有$\left[\frac{n-k}{2}\right]$对同学去植树,有$C_{n-k}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]}$种选对方案.

这时,去植树的同学总人数是$k+2\left[\frac{n-k}{2}\right]$.当$n-k$为奇数时

$$k+2\left[\frac{n-k}{2}\right]=n-1$$

由于一共要有n个人去植树,老师T必须去.当$n-k$为偶数时

$$k+2\left[\frac{n-k}{2}\right]=n$$

受总人数限制,老师T不去植树.那么当k固定时,不同的选人方案数为$C_n^k 2^k C_{n-k}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]}$,当$k$取遍$0,1,2,\cdots,n$时,所有的选人方案总数是应当等于$C_{2n+1}^{n}$.那么,有

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k 2^k C_{n-k}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]}=C_{2n+1}^{n}$$

注 证法1由湖北省武汉市武钢三中朱辰畅同学(女,第36届国际数学奥林匹克获满分、金牌)给出,证法2由江苏省吴县木渎中学顾健同学给出.

❻ 设M为平面上坐标为$(p\times 1\,994,7p\times 1\,994)$的点,其中$p$是素数.求满足下述条件的直角三角形的个数:

(1) 三角形的三个顶点都是整点,而且M是直角顶点;

(2) 三角形的内心是坐标原点.

解 联结坐标原点O及点M,取线段OM的中点$I(p\times 997,7p\times 997)$,把满足条件的一个直角三角形关于点$I$作一个中心对称,即把点$(x,y)$变为点$(p\times 1\,994-x,7p\times 1\,994-y)$.于是,满足题目条件的一个整点直角三角形变为一个为之全等的整点直

角三角形. 三角形的内心变到点 M,直角顶点变到坐标原点. 因此,所求整点直角三角形的个数,只须考虑直角顶点在坐标顶点,内心在点 M 的情况即可.

考虑满足上述条件的整点 Rt△OAB,如图 1 所示,设

$$\angle xOM = \beta, \angle xOA = \alpha, \alpha + \frac{\pi}{4} = \beta$$

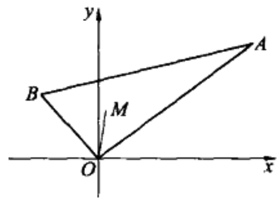


图 1

由题目条件,知

$$\tan\beta = 7$$

$$\tan\alpha = \tan\left(\beta - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan\beta - 1}{1 + \tan\beta} = \frac{3}{4} \quad ①$$

于是,直角边 OA 上的任一点的坐标可写成$(4t, 3t)$,由于 A 是整点,则 $t \in \mathbf{N}, OA = 5t$. 从 $\angle yOB = \alpha$,可知点 B 的坐标为$(-3t^*, 4t^*), t^* \in \mathbf{N}, OB = 5t^*$. 直角三角形内切圆半径

$$r = \frac{\sqrt{2}}{2} OM = 5p \times 1\,994$$

设

$$OA = 2r + p^*, OB = 2r + q^* \quad ②$$

由于 OA, OB, r 皆为 5 的倍数,则正整数 p^*, q^* 都是 5 的倍数.

利用圆外一点到圆的两条切线段长相等,有

$$AB = (r + p^*) + (r + q^*) = 2r + p^* + q^* \quad ③$$

由于 △OAB 是一个直角三角形,有

$$\begin{aligned} 0 = & AB^2 - OA^2 - OB^2 = \\ & (2r + p^* + q^*)^2 - (2r + p^*)^2 - (2r + q^*)^2 = \\ & 2p^* q^* - 4r^2 \end{aligned} \quad ④$$

于是,有

$$p^* q^* = 2r^2 \quad ⑤$$

由于$\frac{p^*}{5}, \frac{q^*}{5}$ 都是正整数,可得

$$\frac{p^*}{5} \cdot \frac{q^*}{5} = 2^3 \times 997^2 \times p^2 \quad ⑥$$

当 $p \neq 2$ 和 $p \neq 997$ 时,有

$$\begin{cases} \dfrac{p^*}{5} = 2^i \times 997^j \times p^k \\ \dfrac{q^*}{5} = 2^{3-i} \times 997^{2-j} \times p^{2-k} \end{cases} \quad ⑦$$

这里 $i = 0,1,2,3; j = 0,1,2; k = 0,1,2$. 那么$\left(\frac{p^*}{5}, \frac{q^*}{5}\right)$有 $4 \times 3 \times 3 = 36$ 组不同的(有序)解.

当 $p = 2$ 时,有

$$\begin{cases} \dfrac{p^*}{5} = 2^i \times 997^j \\ \dfrac{q^*}{5} = 2^{5-i} \times 997^{2-j} \end{cases} \qquad ⑧$$

这里 $i = 0,1,2,3,4,5$;$j = 0,1,2$. 方程组⑧有 $6 \times 3 = 18$ 组不同的(有序)解.

当 $p = 997$ 时,有

$$\begin{cases} \dfrac{p^*}{5} = 2^i \times 997^j \\ \dfrac{q^*}{5} = 2^{3-i} \times 997^{4-j} \end{cases} \qquad ⑨$$

这里 $i = 0,1,2,3$;$j = 0,1,2,3,4$. 方程组⑨有 $4 \times 5 = 20$ 组不同的(有序)解.

于是,所求的直角三角形的个数

$$S = \begin{cases} 36, p \neq 2 \text{ 和 } p \neq 997 \\ 18, p = 2 \\ 20, p = 997 \end{cases} \qquad ⑩$$

第10届中国数学奥林匹克

合肥,1995

1 设 $2n$ 个实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n;b_1,b_2,\cdots,b_n(n\geqslant 3)$ 满足条件:

(1) $a_1+a_2+\cdots+a_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$;

(2) $0<a_1=a_2,a_i+a_{i+1}=a_{i+2}(i=1,2,\cdots,n-2)$;

(3) $0<b_1\leqslant b_2,b_i+b_{i+1}\leqslant b_{i+2}(i=1,2,\cdots,n-2)$.

求证:$a_{n-1}+a_n\leqslant b_{n-1}+b_n$.

证明 若 $b_1\geqslant a_1$,由(2),(3)得

$$b_2\geqslant b_1\geqslant a_1,b_3\geqslant b_1+b_2\geqslant a_1+a_2=a_3,\cdots,b_n\geqslant a_n$$

从而
$$a_{n-1}+a_n\leqslant b_{n-1}+b_n$$

设 $b_1<a_1$,若 $b_1+b_2\geqslant a_1+a_2$,则该二式相减得 $b_2\geqslant a_2$,由(2),(3)得

$$b_3\geqslant b_1+b_2\geqslant a_1+a_2=a_3,\cdots,b_n\geqslant a_n$$

从而也有
$$a_{n-1}+a_n\leqslant b_{n-1}+b_n$$

设

$$b_1<a_1$$
$$b_1+b_2<a_1+a_2,\cdots,b_1+b_2+\cdots+b_{k-2}<a_1+a_2+\cdots+a_{k-2}$$
$$b_1+b_2+\cdots+b_{k-1}<a_1+a_2+\cdots+a_{k-1},3\leqslant k\leqslant n-2$$

若
$$b_1+b_2+\cdots+b_k\geqslant a_1+a_2+\cdots+a_k$$

则该式与上二式分别相减得

$$b_k>a_k,b_k+b_{k-1}>a_k+a_{k-1}$$

由(2),(3)得

$$b_{k+1}\geqslant b_k+b_{k-1}>a_k+a_{k-1}=a_{k+1}$$

再由(2),(3)易得

$$b_{k+2}>a_{k+2},\cdots,b_n>a_n$$

从而结论 $a_{n-1}+a_n\leqslant b_{n-1}+b_n$ 也成立.

最后,设 $b_1<a_1,b_1+b_2<a_1+a_2,\cdots,b_1+b_2+\cdots+b_{n-3}<a_1+a_2+\cdots+a_{n-3},b_1+b_2+\cdots+b_{n-2}<a_1+a_2+\cdots+a_{n-2}$,由条件(1)的式子减去最后一项即得 $b_{n-1}+b_n\geqslant a_{n-1}+a_n$.

② 设N表示自然数集合，$f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$适合条件：$f(1)=1$，且对任何自然数 n 都有

$$\begin{cases}3f(n)f(2n+1)=f(2n)(1+3f(n))\\ f(2n)<6f(n)\end{cases}$$

试求方程

$$f(k)+f(l)=293,k<l$$

的所有解.

解 因 $3f(n)$ 与 $1+3f(n)$ 互质，故由已知等式

$$3f(n)f(2n+1)=f(2n)(1+3f(n))$$

得

$$3f(n)\mid f(2n)$$

又 $f(2n)<6f(n)$，故

$$f(2n)=3f(n) \quad ①$$

$$f(2n+1)=1+3f(n) \quad ②$$

设 $n=2^{a_1}+2^{a_2}+\cdots+2^{a_m}$ 为 n 的二进制展开式（$a_m>a_{m-1}>\cdots>a_1$，为非负整数），以下证明

$$f(n)=3^{a_1}+3^{a_2}+\cdots+3^{a_m} \quad ③$$

当 $n=1$ 时，③ 即为条件 $f(1)=1$.

设 ③ 在 $n<2s$ 时成立，则当 $n=2s$ 时，设 $s=2^{a_1}+2^{a_2}+\cdots+2^{a_m}$，则

$$f(2s)=3f(s)=3(3^{a_1}+3^{a_2}+\cdots+3^{a_m})=$$
$$3^{a_1+1}+3^{a_2+1}+\cdots+3^{a_m+1}$$

而

$$2s=2^{a_1+1}+2^{a_2+2}+\cdots+2^{a_m+1}$$

故 $n=2s+1$ 时式 ③ 也成立. 同时对 $n=2s+1$ 有

$$f(2s+1)=1+3f(s)=1+3^{a_1+1}+\cdots+3^{a_m+1}$$

而

$$2s+1=1+2^{a_1+1}+\cdots+2^{a_m+1}$$

故 $n=2s+1$ 时式 ③ 也成立. 证得式 ③ 对一切 n 成立. 因

$$293=3^5+3^3+2\times3^2+3+2\times1$$

故

$$\begin{cases}f(l)=3^5+3^3+3^2+3+1,3^5+3^3+3^2+1,3^5+3^2+3+1,\\ \qquad 3^5+3^2+1\\ f(k)=3^2+1,3^2+3+1,3^3+3^2+1,3^3+3^2+3+1\end{cases}$$

即满足题设的 $(k,l)=(5,47),(7,45),(13,39),(15,37)$.

③ 试求 $\sum\limits_{i=1}^{10}\sum\limits_{j=1}^{10}\sum\limits_{k=1}^{10}\mid k(x+y-10i)(3x-6y-36j)(19x+95y-95k)\mid$ 的最小值，其中 x 和 y 是任意整数.

解 注意到下述事实:

对 $a < b$,对任实数 t,恒有

$$|t-a|+|t-b| \geqslant |(t-a)-(t-b)| = |b-a|$$

等号成立当且仅当 $a \leqslant t \leqslant b$. 于是

$$\sum_{i=1}^{10} |(x+y-10i)| \geqslant$$

$$|10\times 10 - 10\times 1| + |10\times 9 - 10\times 2| + |10\times 8 - 10\times 3| +$$

$$|10\times 7 - 10\times 4| + |10\times 6 - 10\times 5| = 250$$

等号成立当且仅当 $50 \leqslant x+y \leqslant 60$.

同样地

$$\sum_{j=1}^{10} |3x-6y-36j| = 3\sum_{j=1}^{10} |x-2y-12j| \geqslant 900$$

等号成立当且仅当 $60 \leqslant x-2y \leqslant 72$.

又当 $t \geqslant 10$ 时

$$\sum_{k=1}^{10} |k(t-k)| = \sum_{k=1}^{10} k(t-k) = 55t - c_1$$

是 t 的增函数($c_1 = \sum_{k=1}^{10} k^2$ 为常数).

当 $t \leqslant 1$ 时

$$\sum_{k=1}^{10} |k(t-k)| = c_1 - 55t$$

为 t 的减函数.

当 $m \leqslant t \leqslant m+1 (m = 1,2,\cdots,9)$ 时

$$\sum_{k=1}^{10} |k(t-k)| =$$

$$(1+2+\cdots+m-(m+1)-\cdots-10)t + c_m$$

其中 $c_m = 10^2+9^2+\cdots+(m+1)^2-m^2-(m-1)^2-\cdots-1^2$ 为常数.

易知当 $m < 7$ 时,$1+2+\cdots+m-(m+1)-\cdots-10 < 0$;而当 $m \geqslant 7$ 时,$(1+2+\cdots+m-(m-1)-\cdots-10) > 0$. 故当 $t < 7$ 时,$\sum_{k=1}^{10} |k(t-k)|$ 为 t 的减函数;当 $t \geqslant 7$ 时,$\sum_{k=1}^{10} |k(t-k)|$ 为 t 的增函数. 故

$$\sum_{k=1}^{10} |k(t-k)| \geqslant \sum_{k=1}^{10} |k(7-k)| = 112$$

这样

$$\sum_{k=1}^{10} |k(19x+95y-95k)| =$$

$$95\sum_{k=1}^{10} \left| k\left(\frac{x+5y}{5}-k\right)\right| \geqslant 95\times 112$$

等号成立当且仅当 $x+5y = 35$.

考虑联立方程组

$$\begin{cases} x+5y=35 \\ 50 \leqslant x+y \leqslant 60 \\ 60 \leqslant x-2y \leqslant 72 \end{cases}$$

在 $x=\frac{215}{4}, y=-\frac{15}{4}$ 时，$x+5y=35, x+y=50, x-2y=61\frac{1}{4}$，故

$$\sum_{i=1}^{10}\sum_{j=1}^{10}\sum_{k=1}^{10} | k(x+y-10i)(3x-6y-36j)(19x+95y-95k) |$$

取得最小值

$$250 \times 900 \times 95 \times 112 = 2\ 394\ 000\ 000$$

4 空间有四个球，它们的半径分别为 2,2,3,3，每个球都与其余 3 个球外切，另有一个小球与那四个球都外切，求该小球的半径.

解 四个球的球心组成四面体 $ABCD$，其中 $AB=AC=3+2=5, AD=3+3=6, BD=CD=3+2=5, BC=2+2=4$.

设 BC, AD 的中心分别为 E, F，则易知（图 1）

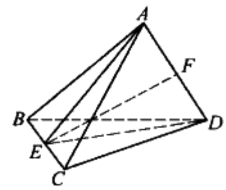


图 1

$$AE=DE=\sqrt{AC^2-CE^2}=\sqrt{5^2-2^2}$$

$$EF=\sqrt{AE^2-AF^2}=\sqrt{5^2-2^2-3^2}=\sqrt{12}$$

由对称性，小球球心 O 在 EF 上，并且

$$OE=\sqrt{OC^2-CE^2}=\sqrt{(r+2)^2-2^2}$$

$$OF=\sqrt{OA^2-AF^2}=\sqrt{(r+3)^2-3^2}$$

（其中 r 为小球半径），从而

$$\sqrt{(r+2)^2-2^2}+\sqrt{(r+3)^2-3^2}=\sqrt{12}$$

即

$$\sqrt{r(r+4)}+\sqrt{r(r+6)}=\sqrt{12} \quad ①$$

用 $r(r+6)-r(r+4)=2r$ 除以上式得

$$\sqrt{r(r+6)}-\sqrt{r(r+4)}=\frac{r}{\sqrt{3}} \quad ②$$

① + ② 得

$$2\sqrt{r(r+6)}=\sqrt{12}+\frac{r}{\sqrt{3}}=\frac{6+r}{\sqrt{3}}$$

故 $$2\sqrt{r}=\frac{\sqrt{6+r}}{\sqrt{3}}, 4r=\frac{6+r}{3}, r=\frac{6}{11}$$

求得小球半径为 $\frac{6}{11}$.

5 设 $a_1, a_2, \cdots, a_{10}$ 是10个两两不同的自然数，它们的和为 1 995，试求

$$a_1a_2 + a_2a_3 + \cdots + a_9a_{10} + a_{10}a_1$$

的最小值.

解 因 $\sum_{i=1}^{10} a_i = 1\,995$ 及 $a_1, a_2, \cdots, a_{10}$ 为自然数，故所述最小值存在.

设 $S = a_1a_2 + a_2a_3 + \cdots + a_{10}a_1$ 已为最小值，不妨设 $a_1, a_2, \cdots, a_{10}$ 中 a_1 最大.

$a_2 + a_{10}$ 应不大于 $a_{k-1} + a_{k+1}$（$k = 3,4,\cdots,9$，约定 $a_{11} = a_1$），否则将 a_1 与 a_k 交换，由于

$$a_1(a_2 + a_{10}) + a_k(a_{k-1} + a_{k+1}) >$$
$$a_k(a_2 + a_{10}) + a_1(a_{k-1} + a_{k+1})$$

$S = a_1a_2 + a_2a_3 + \cdots + a_{10}a_1$ 经调整后更小.

若 $\{a_2, a_3, \cdots, a_{10}\} \neq \{1,2,\cdots,9\}$，则必有某个 $a_k > j, k \in \{2,3,\cdots,10\}, j \in \{1,2,\cdots,9\}$，而 $a_k \notin \{1,2,\cdots,9\}, j \notin \{a_2, a_3, \cdots, a_{10}\}$.

在 $k \neq 2,10$ 时，将 a_k 改为 j，a_1 改为 $a_1 + a_k - j$. 由于

$$(a_1 + a_k - j)(a_2 + a_{10}) + j(a_{k-1} + a_{k+1}) <$$
$$a_1(a_2 + a_{10}) + a_k(a_{k-1} + a_{k+1})$$

S 经调整后更小. 因此在 S 已最小时，$a_3, a_4, \cdots, a_9 \in \{1,2,\cdots,9\}$. 又由于 $a_2 + a_{10} < a_2 + a_4$ 及 $a_2 + a_{10} < a_8 + a_{10}$，故 $a_2 < a_8$，$a_{10} < a_4$，故

$$\{a_2, a_3, \cdots, a_{10}\} = \{1,2,\cdots,9\}$$

从而
$$a_1 = 1\,995 - \sum_{i=2}^{10} i = 1\,995 - 45 = 1\,950$$

这样，由 S 的最小性，必有

$$a_2 + a_{10} = 1 + 2$$

不妨设 $a_2 = 1, a_{10} = 2$，则

$$S = 3 \times 1\,950 + a_3 + a_3a_4 + a_4a_5 + \cdots + a_7a_8 + a_8a_9 + 2a_9$$

则

$$2a_3 + a_3a_4 + a_4a_5 + \cdots + a_7a_8 + a_8a_9 + 2a_9 - a_3 =$$
$$-\frac{1}{2}((2 - a_3)^2 + (a_3 - a_4)^2 + \cdots + (a_9 - 2)^2] +$$
$$2^2 + 3^2 + \cdots + 9^2 - a_3 \geqslant$$

$$-\frac{1}{2}((2-9)^2+(9-3)^2+(8-2)^2+(8-4)^2+(7-3)^2+(7-5)^2+(6-4)^2+(6-5)^2)+2^2+3^2+\cdots+9^2-9=$$
$$9\times(1+3)+8\times(2+4)+7\times(3+5)+6\times(4+5)$$

于是,在 $a_1=1\ 950, a_2=1, a_{10}=2, a_3=9, a_4=3, a_9=8, a_5=7, a_8=4, a_6=5, a_7=6$ 时,S 取得最小值

$$3\times 1\ 950+9\times(1+3)+8\times(2+4)+7\times(3+5)+6\times(4+5)=6\ 044$$

6 设 n 是大于 1 的奇数,已给

$$x_0=(x_1^{(0)},x_2^{(0)},x_n^{(0)})=(1,0,\cdots,0,1)$$

设
$$x_i^k=\begin{cases}0, x_i^{(k-1)}=x_{i+1}^{k-1}\\ 1, x_i^{(k-1)}\neq x_{i+1}^{k-1}\end{cases}, i=1,2,\cdots,n$$

其中 $x_{n+1}^{k-1}=x_1^{k-1}$.记

$$x_k=(x_1^{(k)},x_2^{(k)},\cdots,x_n^{(k)}), k=1,2,\cdots$$

若正整数 m 满足 $x_m=x_0$,求证 m 是 n 的倍数.

证明 $x_i^{(k)}=x_i^{(k-1)}+x_{i+1}^{(k-1)}$,故由归纳法易得

$$x_i^{(k)}=\sum_{t=0}^{k}C_k^t x_{i+t}^{(0)} \pmod 2$$

为简洁计,以下推导中省去 mod 2,并记 $x_{i+t}^{(0)}=x_{i+t}$.

若 m 不是 n 的倍数,则 $m=qn+r, 0<r<n$,记

$$a_i=\begin{cases}C_m^i+C_m^{i+n}+\cdots+C_m^{i+qn}, 1\leqslant i\leqslant r\\ C_m^i+C_m^{i+n}+\cdots+C_m^{i+(q-1)}, r<i\end{cases}$$

则
$$x_i^{(m)}=x_i+a_1x_{i+1}+a_2x_{i+2}+\cdots+a_nx_{i+n}$$

故
$$a_1x_{i+1}+a_2x_{i+2}+\cdots+a_nx_{i+n}=0$$

令 $i=1,2,\cdots,n$,即有

$$a_{n-1}+a_n=0, a_{n-2}+a_{n-1}=0,\cdots,a_1+a_n=0$$

故 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为奇偶性完全相同.

而另一方面

$$\begin{aligned}a_r&=C_m^r+C_m^{r+n}+\cdots+C_m^{r+qn}=\\&C_m^{m-r}+C_m^{m-r-n}+\cdots+C_m^{m-r-qn}=\\&C_m^{qn}+C_m^{(q-1)n}+\cdots+C_m^n+1=\\&a_n+1\end{aligned}$$

得出 a_r 与 a_n 的奇偶性不同,矛盾.故 m 一定为 n 的倍数.

第11届中国数学奥林匹克

天津,1996

1 设 H 是锐角 $\triangle ABC$ 的垂心,由 A 向以 BC 为直径的圆作切线 AP,AQ,切点分别为 P,Q.求证:P,H,Q 三点共线.

证明 设 BC 中点为 O,联结 AO,PQ 交于点 G,于是 $AO\perp PQ$.设 AD,BE 是 $\triangle ABC$ 的两条高,于是点 E 在圆 O 上,如图1所示.

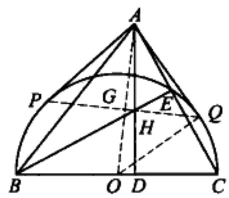


图1

因为 $\angle HEC=90°=\angle HDC$,所以 H,D,C,E 四点共圆.所以

$$AQ^2=AE\cdot AC=AH\cdot AD$$

联结 OQ,则 $OQ\perp AQ$.由射影定理有 $AQ^2=AG\cdot AD$.所以

$$AG\cdot AO=AH\cdot AD$$

所以 G,O,D,H 四点共圆.联结 HG.

因为 $\angle HDO=90°$,所以 $\angle HGO=90°$.

所以直线 HG 与 PQ 重合,即 P,H,Q 三点共线.

2 设 $S=\{1,2,\cdots,50\}$,求最小自然数 k,使 S 的任一 k 元子集中都存在两个不同的数 a 和 b,满足 $(a+b)\mid ab$.

解 设有 $a,b\in S$ 满足条件 $(a+b)\mid ab$.记 $c=(a,b)$,于是 $a=ca_1$,$b=cb_1$,其中 $a_1,b_1\in\mathbf{N}$ 且有 $(a_1,b_1)=1$,因而有

$$c(a_1+b_1)=(a+b)\mid ab=c^2a_1b_1$$

$$(a_1+b_1)\mid ca_1b_1$$

因为 $(a_1+b_1,a_1)=1$,$(a_1+b_1,b_1)=1$,故有

$$(a_1+b_1)\mid c$$

因为 $a,b\in S$,所以 $a+b\leqslant 99$,即 $c(a_1+b_1)\leqslant 99$.故有 $3\leqslant a_1+b_1\leqslant 9$.由此可知,$S$ 中满足条件 $(a+b)\mid ab$ 的不同数对共有23对,如下

$a_1+b_1=3$:(6,3),(12,6),(18,9),(24,12),(30,15),(36,18),(42,21),(48,24)

$a_1 + b_1 = 4$:(12,4),(24,8),(36,12),(48,16)

$a_1 + b_1 = 5$:(20,5),(40,10),(15,10),(30,20),(45,30)

$a_1 + b_1 = 6$:(30,6)

$a_1 + b_1 = 7$:(42,7),(35,14),(28,21)

$a_1 + b_1 = 8$:(40,24)

$a_1 + b_1 = 9$:(45,36)

令 $M = \{6,12,15,18,20,21,24,35,40,42,45,48\}$,则 $|M| = 12$ 且上述 23 个数对中的每一对都至少包含 M 中的 1 个元素.因此,若令 $T = S - M$,则 $|T| = 38$ 且 T 中任何两数都不满足题中要求.可见,所求的最小自然数 $k \geqslant 39$.

注意,下列 12 个满足题中要求的数对互不相交:

(6,3),(12,4),(20,5),(42,7),(24,8),(18,9),(40,10),(35,14),(30,15),(48,16),(28,21),(45,36).

对于 S 的任一 39 元子集 R,它只比 S 少 11 个元素,而这 11 个元素至多属于上述 12 个数对中的 11 对,从而必有 12 对中的 1 对属于 R.

综上可知,所求的最小自然数 $k = 39$.

3 设函数 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 适合条件

$$f(x^3 + y^3) = (x + y)((f(x))^2 - f(x)f(y) + (f(y))^2) \quad ①$$
$$x, y, \in \mathbf{R}$$

试证:对一切 $x \in \mathbf{R}$,都有

$$f(1\,996x) = 1\,996f(x)$$

证明 在 ① 中令 $x = y = 0$,得到 $f(0) = 0$,在 ① 中令 $y = 0$,得到

$$f(x^3) = x(f(x))^2, x \in \mathbf{R} \quad ②$$

式 ② 又可改写成

$$f(x) = x^{\frac{1}{2}}(f(x^{\frac{1}{3}}))^2, x \in \mathbf{R} \quad ②'$$

由此可知,函数 $f(x)$ 与 x 广义同号,即当 $x \geqslant 0$ 时 $f(x) \geqslant 0$,当 $x \leqslant 0$ 时 $f(x) \leqslant 0$.

令

$$S = \{a > 0 \mid f(ax) = af(x), x \in \mathbf{R}\}$$

显然有 $1 \in S$.让我们来证明:若 $a \in S$,则 $a^{\frac{1}{3}} \in S$.由 ② 和 S 的定义有

$$ax(f(x))^2 = af(x^3) = f(ax^3) = f((a^{\frac{1}{3}}x)^3) = a^{\frac{1}{3}}x(f(a^{\frac{1}{3}}x))^2$$

约去公因式,得到

$$(a^{\frac{1}{3}}f(x))^2 = (f(a^{\frac{1}{3}}x))^2$$

利用 $f(x)$ 与 x 广义同号的性质可得

$$f(a^{\frac{1}{3}}x) = a^{\frac{1}{3}}f(x), x \in \mathbf{R} \qquad ③$$

这表明 $a^{\frac{1}{3}} \in S$.

下面来证明:若 $a,b \in S$,则 $a+b \in S$.利用 ① ~ ③,我们有

$$\begin{aligned} f((a+b)x) &= f((a^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}})^3 + (b^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}})^3) = \\ &(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}})x^{\frac{1}{3}}((f(a^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}))^2 - \\ &f(a^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}})f(b^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}) + (f(b^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}))^2) = \\ &(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}})(a^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}})x^{\frac{1}{3}}f(x^{\frac{1}{3}})^2 = \\ &(a+b)f(x), x \in \mathbf{R} \end{aligned}$$

因为 $1 \in S$,故 $1+1=2 \in S$,依此类推可知任何自然数 n 都属于 S,特别地有 $1\,996 \in S$.所以

$$f(1\,996x) = 1\,996f(x)$$

4 8 位歌手参加艺术节,准备为他们安排 m 次演出,每次由其中 4 位登台表演,要求 8 位歌手中任意两位同时演出的次数都一样多.请设计一种方案,使得演出的次数 m 最少.

解 设任意两位歌手都同时演出 r 次,有

$$6m = mC_4^2 = rC_8^2 = 28r$$

$$3m = 14r$$

由此可知 $3 \mid r$,因而 $r \geqslant 3, m \geqslant 14$.下面构造一种演出程序说明 $m=14$ 是可以实现的

$\{1,2,3,4\},\{5,6,7,8\},\{1,2,5,6\},\{3,4,7,8\},\{1,2,7,8\}$

$\{3,4,5,6\},\{1,3,5,7\},\{2,4,6,8\},\{1,3,6,8\},\{2,4,5,7\}$

$\{1,4,5,8\},\{2,3,6,7\},\{1,4,6,7\},\{2,3,5,8\}$

可见,满足条件的演出的最小场次是 14.

5 设 $n \in \mathbf{N}, x_0 = 0, x_i > 0, i = 1,2,\cdots,n$,且 $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1$.求证:

$$1 \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\sqrt{1 + x_0 + x_1 + \cdots + x_{i-1}}\sqrt{x_i + \cdots + x_n}} < \frac{\pi}{2}$$

证明 因为 $\sum_{i=0}^{n} x_i = 1$，故由均值不等式有

$$\sqrt{(1 + x_0 + x_1 + \cdots + x_{i-1})(x_i + \cdots + x_n)} \leqslant \frac{1 + x_0 + x_1 + \cdots + x_n}{2} = 1$$

由此即得所求证的第一个不等式.

因为 $0 \leqslant x_0 + x_1 + \cdots + x_i \leqslant 1, i = 0,1,\cdots,n$，故可令

$$\theta_i = \arcsin(x_0 + x_1 + \cdots + x_i), i = 0,1,\cdots,n$$

于是 $\theta_i \in [0,\frac{\pi}{2}]$，且有 $0 = \theta_0 < \theta_1 < \cdots < \theta_n = \frac{\pi}{2}$，因而有

$$x_i = \sin\theta_i - \sin\theta_{i-1} = 2\cos\frac{\theta_i + \theta_{i-1}}{2}\sin\frac{\theta_i - \theta_{i-1}}{2} < 2\cos\theta_{i-1}\sin\frac{\theta_i - \theta_{i-1}}{2}$$

因为对 $x \in [0,\frac{\pi}{2}]$，有 $\sin x < x$，所以有

$$x_i < 2\cos\theta_{i-1}\cdot\frac{\theta_i - \theta_{i-1}}{2} = (\theta_i - \theta_{i-1})\cos\theta_{i-1}$$

故得
$$\frac{x_i}{\cos\theta_{i-1}} < \theta_i - \theta_{i-1}, i = 1,2,\cdots,n$$

在上式两端对 i 从 1 到 n 求和，得到

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\cos\theta_{i-1}} < \theta_n - \theta_0 = \frac{\pi}{2} \quad ①$$

由 θ_i 定义知 $\sin\theta_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_i$，所以有

$$\cos\theta_{i-1} = \sqrt{1 - \sin^2\theta_{i-1}} = \sqrt{1 - (x_0 + x_1 + \cdots + x_{i-1})^2} = \sqrt{(1 + x_0 + x_1 + \cdots + x_{i-1})(x_i + \cdots + x_n)} \quad ②$$

将 ② 代入 ① 即得所欲证.

6 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C = 90°$，$\angle A = 30°$，$BC = 1$. 求 $\triangle ABC$ 的内接三角形（三顶点分别在三边上的三角形）的最长边的最小值.

解 首先在 $\triangle ABC$ 的内接正三角形的范围内求边长的最小值.

如图 1，在边 BC 上任取一点 D 并记 $BD = x$，然后分别在边 CA，AB 上取点 E 和 F，使 $CE = \frac{\sqrt{3}}{2}x$，$BF = 1 - \frac{x}{2}$.

于是由余弦定理有

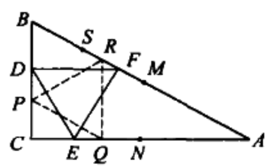


图 1

$$DF^2 = x^2 + \left(1 - \frac{x}{2}\right)^2 - 2x\left(1 - \frac{x}{2}\right)\cos 60° =$$
$$\frac{7}{4}x^2 - 2x + 1$$
$$DE^2 = (1 - x)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2 = \frac{7}{4}x^2 - 2x + 1$$
$$EF^2 = \left(\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2 + \left(1 + \frac{x}{2}\right)^2 -$$
$$2\sqrt{3}\left(1 - \frac{x}{2}\right)\left(1 + \frac{x}{2}\right)\cos 30° =$$
$$\frac{7}{4}x^2 - 2x + 1$$

故得 $DF = DE = EF$,即$\triangle DEF$为正三角形.这表明对于 BC 上的任何一点 D,都可以作出一个内接正三角形.记 CA,AB 中点分别为 N,M,记 BM 中点为 S,则当点 D 从 B 变到 C 时,点 E 从 C 变到 N,点 F 从 M 变到 S.

若记$\triangle DEF$ 的边长为 a,则有

$$a^2 = \frac{7}{4}x^2 - 2x + 1 = \frac{7}{4}\left(x^2 - \frac{8}{7}x + \frac{4}{7}\right) =$$
$$\frac{7}{4}\left(\left(x - \frac{4}{7}\right)^2 - \frac{16}{49} + \frac{4}{7}\right) =$$
$$\frac{7}{4}\left(x - \frac{4}{7}\right)^2 + \frac{3}{7}$$

可见,当 $x = \frac{4}{7}$ 时,边长 a 取得最小值$\sqrt{\frac{3}{7}}$.图 1 中虚线所示的$\triangle PQR$ 即为取最小值的位置.

下面证明,任何内接三角形的最大边的边长都不小于$\sqrt{\frac{3}{7}}$.

为方便计,引入以 C 为原点,CA 为正半 x 轴的直角坐标系(图 2).设$\triangle XYZ$ 为$\triangle ABC$ 的任一内接三角形,其中点 X,Y,Z 分别位于边 BC,CA,AB 上.在 BM 上取点 R_1 和 R_2,使得 $MR_1 = \frac{1}{3}MB$,$MR_2 = \frac{3}{14}MB$,于是 $AR_1 = \frac{2}{3}AB$,$BR_2 = \frac{11}{14}BM$,从而有

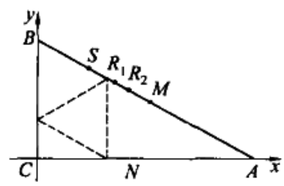


图 2

$$y_{R_1} = \frac{2}{3} > \sqrt{\frac{3}{7}}$$
$$x_{R_2} = \frac{11}{14} \times \frac{\sqrt{3}}{2} > \frac{10}{13} \times \frac{\sqrt{3}}{2} > \sqrt{\frac{3}{7}}$$

(1) 若点 Z 位于线段 BR_1 上,则 $y_Z \geqslant y_{R_1} > \sqrt{\frac{3}{7}}$;若点 Z 位于线段 R_2A 上,则 $x_Z \geqslant x_{R_2} > \sqrt{\frac{3}{7}}$.可见,这时$\triangle XYZ$ 的最长边的边

长大于$\sqrt{\frac{3}{7}}$.

(2) 设点 Z 位于线段R_1R_2内部,则将点 Z 作为点F,作证明开头所述的正$\triangle DEF$.不难验证,$x_E < x_F$,$y_D < y_F$.因而,若点 X 位于线段 DC 上,则 $ZX \geqslant ZD = FD$;若点 Y 位于线段 CE 上,则 $ZY \geqslant ZE = FE$;若点 X 位于BD 上,且点 Y 位于EA 上,则由勾股定理知 $XY \geqslant DE$.所以$\triangle XYZ$ 的最长边的边长不小于$\triangle DEF$ 的边长,从而不小于$\sqrt{\frac{3}{7}}$.

综上可知,所求的最长边的最小值为$\sqrt{\frac{3}{7}}$.

第 12 届中国数学奥林匹克

杭州,1997

1 设实数 $x_1, x_2, \cdots, x_{1\,997}$ 满足如下两个条件:

(1) $-\frac{1}{\sqrt{3}} \leqslant x_i \leqslant \sqrt{3} (i = 1, 2, \cdots, 1\,997)$;

(2) $x_1 + x_2 + \cdots + x_{1\,997} = -318\sqrt{3}$.

试求: $x_1^{12} + x_2^{12} + \cdots + x_{1\,997}^{12}$ 的最大值,并说明理由.

解 满足题设条件的任何一组 $x_1, x_2, \cdots, x_{1\,997}$ 之中,若有这样的 x_i 和 x_j 满足

$$\sqrt{3} > x_i \geqslant x_j > -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

则记

$$m = \frac{1}{2}(x_i + x_j)$$

$$h_0 = \frac{1}{2}(x_i - x_j) = x_i - m = m - x_j$$

我们观察到

$$(m + h)^{12} + (m - h)^{12} = 2 \sum_{0 \leqslant k = 2l \leqslant 12} C_{12}^{k} \cdot m^{12-k} \cdot h^k$$

随 $h > 0$ 的增大而增大. 约定取

$$h = \min\left\{\sqrt{3} - m, m - \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right\}$$

并以 $x'_i = m + h, x'_j = m - h$ 代替 x_i 和 x_j. 则诸变元之和不改变,而诸变元值的 12 次方之和增大.

因此,所求的 12 次方幂和的最大值只能由以下情形达到:至多只有一个变元取值于 $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}\right)$,其余变元取值都为 $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ 或 $\sqrt{3}$.

设有 u 个变元取值 $-\frac{1}{\sqrt{3}}$, v 个变元取值 $\sqrt{3}$;

w(= 0 或 1) 个变元取值于 $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}\right)$(若有,则将该值记为 t).

于是

$$\begin{cases} u+v+w=1\ 997 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}}u+\sqrt{3}v+tw=-318\sqrt{3} \end{cases}$$

由此得到
$$4v+(\sqrt{3}t+1)w=1\ 043$$

因为$(\sqrt{3}t+1)w=1\ 043-4v$是整数,并且

$$0\leqslant(\sqrt{3}t+1)w<4$$

所以$(\sqrt{3}t+1)w$是1 043除以4的余数.据此求得

$$v=260,t=\frac{2}{\sqrt{3}},u=1\ 736$$

据以上讨论,得到$x_1^{12}+x_2^{12}+\cdots+x_{1\,997}^{12}$的最大值

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{12}u+(\sqrt{3})^{12}v+t^{12}=$$

$$\frac{1\ 736+4\ 096}{729}+729\times 260=$$

$$8+189\ 540=189\ 548$$

2 设$A_1B_1C_1D_1$是任意凸四边形,P是形内一点,且P到各顶点的连线与四边形过该顶点的两条边的夹角均为锐角.递推定义A_k,B_k,C_k和D_k分别为P关于直线$A_{k-1}B_{k-1}$,$B_{k-1}C_{k-1}$,$C_{k-1}D_{k-1}$和$D_{k-1}A_{k-1}$的对称点($k=2,3,\cdots$).

考察四边形序列$A_jB_jC_jD_j$($j=1,2,\cdots$).

试问:(1) 前12个四边形中,哪些必定与第1 997个相似,哪些未必?

(2) 假设第1 997个是圆内接四边形,那么在前12个四边形中,哪些必定是圆内接四边形,哪些未必?

对以上问题的回答,肯定的应给证明,未必的应举例说明.

解 首先记

$$A'_1=A_1,B'_1=B_1,C'_1=C_1,D'_1=D_1$$

约定将P到直线$A'_{k-1}B'_{k-1}$,$B'_{k-1}C'_{k-1}$,$C'_{k-1}D'_{k-1}$和$D'_{k-1}A'_{k-1}$的垂线足记为

$$A'_k,B'_k,C'_k,D'_k,k=2,3,\cdots$$

显然有$A'_kB'_kC'_kD'_k\backsim A_kB_kC_kD_k$.

只须对以下的四边形序列讨论相应的问题

$$A'_jB'_jC'_jD'_j,j=1,2,\cdots$$

分别将$\angle D'_jA'_jP$,$\angle A'_jB'_jP$,$\angle B'_jC'_jP$,$\angle C'_jD'_jP$记为$\alpha_j,\beta_j,\gamma_j,\delta_j$;将$\angle PA'_jB'_j$,$\angle PB'_jC'_j$,$\angle PC'_jD'_j$,$\angle PD'_jA'_j$记为$\overline{\alpha}_j,\overline{\beta}_j,\overline{\gamma}_j$,

$\overline{\delta}_j$.

由于 $A'_{j+1},B'_{j+1},C'_{j+1},D'_{j+1}$ 是垂线足,利用由此产生的四点共圆关系可知

$$(\alpha_{j+1},\beta_{j+1},\gamma_{j+1},\delta_{j+1}) = (\alpha_j,\beta_j,\gamma_j,\delta_j)$$
$$(\overline{\alpha}_{j+1},\overline{\beta}_{j+1},\overline{\gamma}_{j+1},\overline{\delta}_{j+1}) = (\overline{\beta}_j,\overline{\gamma}_j,\overline{\delta}_j,\overline{\alpha}_j)$$

据此得到

$$(\alpha_{j+4},\beta_{j+4},\gamma_{j+4},\delta_{j+4}) = (\alpha_j,\beta_j,\gamma_j,\delta_j)$$
$$(\overline{\alpha}_{j+4},\overline{\beta}_{j+4},\overline{\gamma}_{j+4},\overline{\delta}_{j+4}) = (\overline{\alpha}_j,\overline{\beta}_j,\overline{\gamma}_j,\overline{\delta}_j)$$

因而 $$A'_{j+4}B'_{j+4}C'_{j+4}D'_{j+4} \backsim A'_jB'_jC'_jD'_j$$

(这是以 P 为中心的旋转位似). 又因为

$$(\alpha_{j+2}+\overline{\alpha}_{j+2})+(\gamma_{j+2}+\overline{\gamma}_{j+2}) = \alpha_j+\overline{\gamma}_j+\gamma_j+\overline{\alpha}_j = (\alpha_j+\overline{\alpha}_j)+(\gamma_j+\overline{\gamma}_j)$$

所以四边形 $A'_{j+2}B'_{j+2}C'_{j+2}D'_{j+2}$ 与 $A'_jB'_jC'_jD'_j$ 的相应对角和相同.

根据以上讨论,我们断定:

(1) 在序列的前 12 个四边形之中,第 1、第 5 和第 9 个四边形与序列的第 1 997 个四边形相似,其余的未必(反例见后);

(2) 若第 1 997 个四边形为圆内接四边形,则在序列的前 12 个四边形中,第 1,3,5,7,9,11 这六个四边形必定是圆内接四边形,其余未必(反例见后).

下面举例说明(1) 和(2) 中关于"未必" 的论断.

若四边形有一条且仅有一条对角线(称中分线) 能够垂直平分另一条对角线(称被分线),则称该四边形为非平凡筝形,以下简称为筝形(相等的对角为锐角的筝形被称为"胖筝形";相等的对角为钝角的筝形被称为"瘦筝形"). 以一个胖筝形作为 $A_1B_1C_1D_1$,则第二、第三、第四个四边形分别为梯形、瘦筝形、梯形,第五个才又成为胖筝形.因此所产生的四边形序列以 4 为最小相似周期. 前 12 个四边形中除了第 1,5,9 外,其余的都不与第 1 997 个四边形相似.

考察刚才所举例子中的序列,将该序列中的第 2,第 3,…,第 1 998 个重新编号为第 1 个,第 2 个,…,第 1 997 个,作为我们的新的四边形序列.因为胖筝形不能内接于圆,所以在新四边形序列的前 12 项中,只有第 1,3,5,7,9,11 个四边形才是圆内接四边形,其余均不是.

3 求证:存在无穷多个自然数 m,使得可将 $1,2,\cdots,3n$ 列成数表

$$\begin{matrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{matrix}$$

满足如下两个条件:

(1) $a_1+b_1+c_1=a_2+b_2+c_2=\cdots=a_n+b_n+c_n$ 且为 6 的倍数;

(2) $a_1+a_2+\cdots+a_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=c_1+c_2+\cdots+c_n$ 且为 6 的倍数.

证明 将满足所述两个条件的自然数 n 的集合记作 S. 设 $n\in S$,由条件(1)和(2)分别推知:存在自然数 s 和 t,使得

$$\frac{3n(3n+1)}{2}=6sn$$

$$\frac{3n(3n+1)}{2}=18t$$

即

$$3n+1=4s$$

$$n(3n+1)=12t$$

所以

$$n\equiv 1(\bmod 4), n\equiv 0(\bmod 3)$$

因此 n 必具形式

$$n=12k+9, k=0,1,2,\cdots \tag{①}$$

证法 1 可使式①满足的最小自然数 n 是 9. 下证 $9\in S$. 我们有

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\\3&1&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&6&3\\3&0&6\\6&3&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&8&6\\5&3&7\\9&4&2\end{pmatrix}=A_3$$

容易看出 A_3 的 3 个行之和,3 个列之和都是 15. 并且 A_3 的 9 个元素分别为 $1,2,\cdots,9$. 现记

$$\alpha(3)=(1,8,6),\beta(3)=(5,3,7),\gamma(3)=(9,4,2)$$

并构造 3×9 的数表 A_9 如下

$$A_9=\begin{pmatrix}\alpha(3) & \beta(3)+18 & \gamma(3)+8\\ \beta(3)+9 & \gamma(3) & \alpha(3)+18\\ \gamma(3)+18 & \alpha(3)+9 & \beta(3)\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}1&8&6&23&21&25&18&13&11\\14&12&16&9&4&2&19&26&24\\27&22&20&10&17&15&5&3&7\end{pmatrix}$$

容易看出 A_9 的 27 个元素恰为 $1,2,\cdots,27$,并且

各列之和均为 $15+9+18=42\equiv 0 \pmod 6$;

各行之和均为 $3(15+9+18)=126\equiv 0 \pmod 6$.

所以 $9\in S, S\neq\varnothing$.

假设 $m\in S$,我们来证明 $9m\in S$.

由于 $m\in S$,故可将 $1,2,\cdots,3m$ 列为 $3\times m$ 的数表 A_m,使得各列之和均为 $6u$,各行之和均为 $6v$,其中 u,v 均为自然数.现将 A_m 的第一行记作 $\alpha(m)$,第二行记作 $\beta(m)$,第三行记作 $\gamma(m)$,并构造 $3\times 3m$ 的数表 A_{3m} 如下

$$A_{3m}=\begin{pmatrix}\alpha(m) & \beta(m)+6m & \gamma(m)+3m\\ \beta(m)+3m & \gamma(m) & \alpha(m)+6m\\ \gamma(m)+6m & \alpha(m)+3m & \beta(m)\end{pmatrix}$$

其中 $\beta(m)+3m$ 表示将 $\beta(m)$ 中的每一个元素都加上 $3m$,其余记号含义类似.于是不难看出,A_{3m} 中的 $9m$ 个元素恰为 $1,2,\cdots,9m$,并且

各列之和均为 $6u+9m$;

各行之和均为 $18v+9m^2$.

再将 A_{3m} 的第一行、第二行和第三行分别记作 $\alpha(3m)$,$\beta(3m)$ 和 $\gamma(3m)$,并构造 $3\times 9m$ 的数表 A_{9m} 如下

$$A_{9m}=\begin{pmatrix}\alpha(3m) & \beta(3m)+18m & \gamma(3m)+9m\\ \beta(3m)+9m & \gamma(3m) & \alpha(3m)+18m\\ \gamma(3m)+18m & \alpha(3m)+9m & \beta(3m)\end{pmatrix}$$

不难看出 A_{9m} 的 $27m$ 个元素恰为 $1,2,\cdots,27m$,并且

各列之和均为 $6u+36m$ 且为 6 的倍数;

各行之和均为

$$3(18v+9m^2)+3m\cdot 18m+3m\cdot 9m=54v+108m^2\equiv 0 \pmod 6$$

这就证得:只要 $m\in S$,则必 $9m\in S$.

综合上述,知 $S\supset\{9^k\mid k=1,2,\cdots\}$,所以 S 为无穷集合.

证法 2 我们来证明

$$A_m=\begin{pmatrix}1 & 4 & 7 & 10 & \cdots\\ 6k+5 & 12k+8 & 6k+2 & 12k+5 & \cdots\\ 12k+9 & 6k+3 & 12k+6 & 6k & \cdots\end{pmatrix}$$

不难看出,A_m 的各列之和相等,均为 $18k+15$;A_m 的第二行之和为 $(4k+3)(6k+5)=\dfrac{m(3m+1)}{2}$;第一行之和为 $(4k+3)(6k+4)$;第三行之和为 $(4k+3)(6k+6)$.

下面来调整 A_m,使 3 个行之和相等.

由于 $k\equiv 2(\bmod 9)$，所以 $l=\frac{1}{9}(2k+5)$ 为正整数．容易看出 A_m 的第一行是公差 $d_1=3$，首项 $a_1=1$ 的等差数列，所以其第 $2l$ 项为

$$a_{2l}=1+3(2l-1)=6l-2=\frac{4}{3}(k+1)$$

A_m 的第三行中，$c_2,c_4,\cdots,c_{m-1}$ 构成公差 $d_3=-3$，首项 $c_2=6k+3$ 的等差数列，所以

$$c_{2l}=6k+3-3(l-1)=6k+6-\frac{1}{3}(2k+5)=\frac{1}{3}(16k+13)$$

易见 $$c_{2l}-a_{2l}=\frac{1}{3}(12k+9)=4k+3$$

因此只要在 A_m 中对换 a_{2l} 与 c_{2l} 的位置，便可使其三个行之和全都相等，都为

$$(4k+3)(6k+5)=\frac{m(3m+1)}{2}$$

并且各列之和保持不变，即都是 $18k+15$.

现将经过上述对换后的数表记为 B_m，并将 B_m 的第一行记为 $\alpha(m)$，第二行记为 $\beta(m)$，第三行记为 $\gamma(m)$. 再构造 $3\times 3m=3\times(12k+9)$ 的数表 A_{3m} 如下

$$A_{3m}=\begin{pmatrix}\alpha(m) & \beta(m)+6m & \gamma(m)+3m\\ \beta(m)+3m & \gamma(m) & \alpha(m)+6m\\ \gamma(m)+6m & \alpha(m)+3m & \beta(m)\end{pmatrix}$$

于是，不难看出，A_{3m} 的所有元素恰为 $1,2,\cdots,12k+9$，其各列之和，各行之和分别相等，且

$$\text{列和}=18k+15+9m=54k+42\equiv 0(\bmod 6)$$

$$\text{行和}=\frac{3}{2}m(3m+1)+6m^2+3m^2=3(4k+3)(6k+5)+9(4k+3)^2=6(4k+3)(9k+7)$$

$$S\supset\{12k+9\mid k\equiv 2(\bmod 9)\}$$

设 $k\equiv 2(\bmod 9)$，记 $m=4k+3$，我们先将 $1,2,\cdots,3m$ 列成如下的 $3\times m$ 数表 A_m

$$A_m = \begin{pmatrix} 12k-2 & 12k+1 & 12k+4 & 12k+7 \\ 6k+11 & 5 & 6k+8 & 2 \\ 6 & 6k+9 & 3 & 6k+6 \end{pmatrix}$$

都是 6 的倍数.

这就表明,只要 $k = 2 \pmod 9$,则

$$12k+9 \in S$$

所以,$S \supset \{12k+9 \mid k \equiv 2 \pmod 9\}$ 为无限集.

4 四边形 $ABCD$ 内接于圆,其边 AB 与 DC 的延长线交于点 P,AD 与 BC 的延长线交于点 Q,由 Q 作该圆的两条切线 QE 和 QF,切点分别为 E,F.

求证:P,E,F 三点共线.

解 如图 1,联结 PQ,并在 PQ 上取一点 M,使得 B,C,M,P 四点共圆,则

$$QE^2 = QM \cdot QP = QC \cdot QB \quad ①$$

以及 $\angle PMC = \angle PDQ$.从而 C,D,Q,M 四点共圆.于是

$$PM \cdot PQ = PC \cdot PD \quad ②$$

由 ①,②,有

$$PQ^2 = QC \cdot QB + PC \cdot PD$$

联结 PF,设 PF 与圆的另一交点为 E',作 QG 垂直于 PF,垂足为 G,则

$$PD \cdot PC = PE' \cdot PF$$

$$QF^2 = QC \cdot QB$$

所以 $$PE' \cdot PF + QF^2 = PQ^2$$

即 $$PE' \cdot PF = PQ^2 - QE^2$$

又 $$PQ^2 - QF^2 = PG^2 - GF^2 = (PG - GF)(PG + GF) = PF(PG - GF)$$

从而 $$PG - GF = PE' = PG - GE'$$

即 $$GF = GE'$$

故点 E' 与 E 重合.

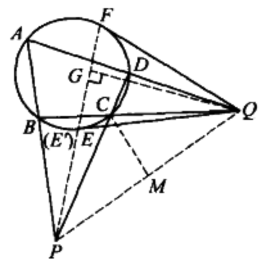


图 1

5 设 $A=\{1,2,3,\cdots,17\}$. 对于映射 $f:A\to A$,记 $f^{[1]}(x)=f(x),f^{[k+1]}(x)=f(f^{[k]}(x))(k\in\mathbf{N})$.

设从 A 到 A 的一一射射 f 满足条件:存在自然数 M,使得

(1) 当 $m<M,1\leqslant i\leqslant 16$ 时,有

$$f^{[m]}(i+1)-f^{[m]}(i)\not\equiv\pm 1(\bmod 17)$$

$$f^{[m]}(1)-f^{[m]}(17)\not\equiv\pm 1(\bmod 17)$$

(2) 当 $1\leqslant i\leqslant 16$ 时,有

$$f^{[M]}(i+1)-f^{[M]}(i)\equiv 1\text{ 或 }-1(\bmod 17)$$

$$f^{[M]}(1)-f^{[M]}(17)\equiv 1\text{ 或 }-1(\bmod 17)$$

试对满足上述条件的一切 f,求所对应的 M 的最大可能值,并证明你的结论.

解 所求 $M_0=8$. 先证 $M_0\geqslant 8$.

事实上,可令映射 $f(i)\equiv 3i-2(\bmod 17)$,其中 $i\in A,f(i)\in A$. 若

$$f(i)\equiv f(j)(\bmod 17)$$

则

$$3i-2\equiv 3j-2(\bmod 17)$$

有

$$i\equiv j(\bmod 17)$$

所以

$$i=j$$

映射 f 为从 A 到 A 的一一映射.

又由映射 f 的定义,易知

$$f^{[n]}(i)\equiv 3^n\cdot i-3^n+1(\bmod 17)$$

若

$$\begin{cases}f^{[M]}(i+1)-f^{[M]}(i)\equiv 1\text{ 或 }-1(\bmod 17)\\f^{[M]}(1)-f^{[M]}(17)\equiv 1\text{ 或 }-1(\bmod 17)\end{cases}$$

则

$$\begin{cases}[3^M(i+1)-3^M+1]-[3^M\cdot i-3^M+1]\equiv +1\text{ 或 }-1(\bmod 17)\\1-[3^M\times 17-3^M+1]\equiv +1\text{ 或 }-1(\bmod 17)\end{cases}$$

即

$$3^M\equiv +1\text{ 或 }-1(\bmod 17)$$

但 $3^1\equiv 3,3^2\equiv 9,3^3\equiv 10,3^4\equiv 13,3^5\equiv 5,3^6\equiv 15,3^7\equiv 11$, $3^8\equiv -1(\bmod 17)$,故 $M_0\geqslant 8$.

再证 $M_0\leqslant 8$.

任作一个凸 17 边形 $A_1A_2\cdots A_{17}$,记作 G. 我们先规定:

当 $i+1=18$ 时,取 $i+1$ 为 1;当 $i-1=0$ 时,取 $i-1=17$. 然后按如下规则连线段:若 $1\leqslant m<M_0,f^{[m]}(i)=a,f^{[m]}(i+1)=b$ 时,就连线段 A_aA_b.

显然,所连线段必为 G 的对角线. 可以证明:所连的对角线没有重复. 事实上,若有两条连线相同,即存在 i,j 及 $M_0>p>q>$

0,使

$$f^{[p]}(i)=f^{[q]}(j)$$

$$f^{[p]}(i+1)=f^{[q]}(j+1)$$

或

$$f^{[p]}(i+1)=f^{[q]}(j-1)$$

于是,有

$$\begin{cases}f^{[p-q]}(i)=j\\f^{[p-q]}(i+1)=j+1\text{ 或 }f^{[p-q]}(i+1)=j-1\end{cases}$$

且 $M_0>p-q>0$,这显然与 M_0 的定义矛盾.

故所连对角线没有重复.

但 G 共有 17×7 条对角线.所以

$$17\times(M_0-1)\leqslant 17\times 7$$

故

$$M_0\leqslant 8$$

6 设非负数列 $a_1,a_2,\cdots$ 满足条件

$$a_{n+m}\leqslant a_n+a_m,m,n\in\mathbf{N}$$

求证:对任意 $n\geqslant m$ 均有

$$a_n\leqslant ma_1+\left(\frac{n}{m}-1\right)a_m$$

证法 1 由假设可得

$$0\leqslant a_n\leqslant a_{n-1}+a_1\leqslant\cdots\leqslant na_1 \quad ①$$

若 $n>m$,则由假设可知

$$\frac{a_n}{n}-\frac{a_m}{m}\leqslant\frac{a_{n-m}+a_m}{n}-\frac{a_m}{m}=\frac{ma_{n-m}-(n-m)a_m}{nm}=$$

$$\frac{n-m}{n}\left(\frac{a_{n-m}}{n-m}-\frac{a_m}{m}\right)$$

如果 $n-m>m$,则继续此过程,经有限步,易知存在自然数 s,使得

$$1\leqslant s\leqslant m$$

且

$$\frac{a_n}{n}-\frac{a_m}{m}\leqslant\frac{s}{n}\left(\frac{a_s}{s}-\frac{a_m}{m}\right) \quad ②$$

显然 ② 对于 $n=m$ 也成立,由 ② 和 ① 可得

$$\frac{a_n}{n}-\frac{a_m}{m}\leqslant\frac{s}{n}\left(a_1-\frac{a_m}{m}\right)$$

再由 $a_1\geqslant\frac{a_m}{m}$ 可得

$$\frac{a_n}{n}-\frac{a_m}{m}\leqslant\frac{m}{n}\left(a_1-\frac{a_m}{m}\right)$$

所以
$$a_n \leqslant ma_1 + \left(\frac{n}{m} - 1\right) a_m$$
即命题成立.

证法 2 由假设得
$$0 \leqslant a_n \leqslant a_{n-1} + a_1 \leqslant \cdots \leqslant na_1 \tag{①}$$
用归纳法证明命题对任何 $n, m \in \mathbf{N}$ 成立.

固定 $m \in \mathbf{N}$,当 $n = 1$ 时
$$\text{原不等式} \Leftrightarrow \left(1 - \frac{1}{m}\right)a_m \leqslant (m-1)a_1 \Leftrightarrow$$
$$(m-1)a_m \leqslant (m-1)ma_1$$
由 ① 即知当 $n = 1$ 时命题成立,归纳假设当 $1 \leqslant n \leqslant k$ 时命题成立,分两种情况讨论:

i $k < m$,则由 ① 可得
$$\frac{a_{k+1}}{k+1} - \frac{a_m}{m} \leqslant a_1 - \frac{a_m}{m}$$
再由 $a_1 - \frac{a_m}{m} \geqslant 0$ 可知
$$\frac{a_{k+1}}{k+1} - \frac{a_m}{m} \leqslant \frac{m}{k+1}\left(a_1 - \frac{a_m}{m}\right)$$
从而
$$a_{k+1} \leqslant ma_1 + \left(\frac{k+1}{m} - 1\right) a_m$$
ii $k \geqslant m$,则
$$k + 1 - m \geqslant 1$$
由假设得
$$a_{k+1} \leqslant a_{k+1-m} + a_m$$
再用归纳假设可知
$$a_{k+1-m} \leqslant ma_1 + \left(\frac{k+1-m}{m} - 1\right) a_m$$
于是
$$a_{k+1} \leqslant ma_1 + \left(\frac{k+1}{m} - 1\right) a_m$$
综合以上两种情况,可知当 $n = k + 1$ 时命题也成立.

第 13 届中国数学奥林匹克

广州，1998

1 在一个非钝角 $\triangle ABC$ 中，$AB > AC$，$\angle B = 45°$，O 和 I 分别是 $\triangle ABC$ 的外心和内心，且 $\sqrt{2}OI = AB - AC$。求 $\sin A$.

解 由已知条件及欧拉公式得

$$\left(\frac{c-b}{\sqrt{2}}\right)^2 = OI^2 = R^2 - 2Rr \quad ①$$

再由熟知的几何关系得

$$r = \frac{c+a-b}{2}\tan\frac{B}{2} = \frac{c+a-b}{2}\tan\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}-1}{2}(c+a-b) \quad ②$$

由 ① 和 ② 及正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ 得

$$1 - 2(\sin C - \sin B)^2 = 2(\sin A + \sin C - \sin B)(\sqrt{2} - 1)$$

因为

$$\angle B = \frac{\pi}{4}, \sin B = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin C = \sin\left(\frac{3\pi}{4} - \angle A\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin A + \cos A)$$

所以

$$2\sin A\cos A - (2-\sqrt{2})\sin A$$

$$\sqrt{2}\cos A + \sqrt{2} - 1 = 0$$

$$(\sqrt{2}\sin A - 1)(\sqrt{2}\cos A - \sqrt{2} + 1) = 0$$

于是 $\sin A = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $\cos A = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$，这时

$$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\sqrt{2} - \frac{1}{2}}$$

总之，$\sin A = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $\sin A = \sqrt{\sqrt{2} - \frac{1}{2}}$。(严格地说，还应验证这两个值都满足条件)

② 对于给定的大于 1 的正整数 n，是否存在 $2n$ 个两两不同的正整数 $a_1,a_2,\cdots,a_n,b_1,b_2,\cdots,b_n$，同时满足以下两个条件：

(1) $a_1+a_2+\cdots+a_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$；

(2) $n-1>\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i-b_i}{a_i+b_i}>n-1-\frac{1}{1\,998}$.

请说明理由.

解 存在符合命题要求的 $2n$ 个数. 令 $a_i=2M_i,b_i=2i$($i=1,2,3,\cdots,n-1$；M 为大于或等于 $8\,000n$ 的正整数).

$a_n=(M-1)^2n(n-1),b_n=M(M-1)n(n-1)$.

显然，上述 $2n$ 个数两两不同，且

$$a_1+a_2+\cdots+a_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=n(n-1)(M^2-M+1)$$

另一方面，我们有

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i-b_i}{a_i+b_i}=(n-1)\frac{M-1}{M+1}-\frac{1}{2M-1}<n-1$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i-b_i}{a_i+b_i}=(n-1)-\frac{2(n-1)}{M+1}-\frac{1}{2M-1}>$$

$$n-1-\frac{2(n-1)}{8\,000n}-\frac{1}{2M-1}>$$

$$n-1-\frac{2(n-1)}{8\,000n}-\frac{1}{8\,000}>$$

$$n-1-\frac{1}{1\,998}$$

因此，上述所给的 $2n$ 个数符合命题要求.

③ 设 $S=\{1,2,\cdots,98\}$，求最小自然数 n，使得 S 的任一 n 元子集中都可以选出 10 个数，无论怎样将这 10 个数均分成两组，总有一组中存在一个数与另外 4 个数都互质，而另一组中总有一个数与另外 4 个数都不互质.

解 所求的最小自然数 $n=50$.

若 $n\leqslant 49$，由于 S 中偶数共有 49 个，则由这 49 个偶数中的 n 个偶数所组成的 S 的 n 元子集中，任意 10 个数都有公因数 2，不满足要求.

下面证明 $n=50$ 时满足要求.

对于 S 的任意一个 50 元子集 T，记 $E(T)=T$ 中偶数元素的个数，则 $50-E(T)=T$ 中奇数元素的个数. 下证 $|T|=50$.

设 x 是 S 中的奇数(x 不一定在 T 中)，记 $f(x)$ 为 S 中与 x 不

互素的偶数元素的个数,显然$f(x)\leqslant\left[\frac{49}{3}\right]=16$.由于$S$中奇数有49个,偶数也有49个,所以$T$中必有一个奇数.下面建立一个重要事实.

引理 若有奇数$x\in T$,使得$f(x)\leqslant E(T)-9$,则S的50元子集T必定符合要求.

引理的证明 T中与x互素的偶数个数等于$E(T)-T$中与x不互素的偶数个数大于等于$E(T)-S$中与x不互素的偶数个数等于$E(T)-f(x)\geqslant 9$,取这个奇数$x\in T$及T中与x互素的9个偶数组成T的一个10元子集,显然该10元子集符合题目要求,引理得证.

另外,还有一些简单但又必需的事实:S中前几个奇素数为3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43,47,53,59;S中最小素因子为3的奇数共有16个($3,3\times5,3\times5^2,3\times7,3\times11,3\times13,3\times17,3\times19,3\times23,3\times29,3\times31,3^2,3^2\times5,3^2\times7,3^3,3^4$);$S$中最小素因子为5的奇数共有7个($5,5\times7,5\times11,5\times13,5\times17,5\times19,5^2$);$S$中最小素因子为7的奇数共有4个($7,7\times11,7\times13,7^2$);$S$中最小素因子大于或等于11的奇数最多有1个;$S$中包含最小元素1.

下面对$E(T)$的取值情况分类讨论(利用引理).

i 若$E(T)\geqslant 25$,则对任何奇数$x\in T\subset S$,必有$f(x)\leqslant 16=25-9\leqslant E(T)-9$,该50元子集符合题目要求.

ii 若$24\geqslant E(T)\geqslant 16$,则$T$中奇数有$50-E(T)\geqslant 26$个.因为$1+16+7=24<26\leqslant 50-E(T)$,所以,$T$中必有最小素因子大于或等于7的奇数$x$.于是,$f(x)\leqslant f(7)=\left[\frac{49}{7}\right]=7=16-9\leqslant E(T)-9$.该$T$符合要求.

iii 若$15\geqslant E(T)\geqslant 10$,则$T$中奇数有$50-E(T)\geqslant 35$(个).因为$1+16+7+4=28=35-7\leqslant(50-E(T))-7$,所以,$T$中必有最小素因子大于或等于31的奇数$x$.于是,$f(x)\leqslant f(31)=\left[\frac{49}{31}\right]=1=10-9\leqslant E(T)-9$.该$T$符合要求.

iv 若$E(T)=9$,则T中奇数有$50-E(T)=41$个.因为$1+16+7+4=28=41-13=(50-E(T))-13$,所以,$T$中必有最小素因子大于或等于59的奇数$x$.于是,$f(x)\leqslant f(59)=\left[\frac{49}{59}\right]=0=E(T)-9$,该$T$符合要求.

v 若$E(T)\leqslant 8$,则T中奇数有$50-E(T)\geqslant 42$个.因为$1+16+7+4=28=42-14\leqslant(50-E(T))-14$,所以,$T$中必有最小素因子大于或等于61的奇数$x$,该$x$本身是素数且大于或等于

61. 显然，S 的不在 T 中的奇数共有 $49-(50-E(T))\leqslant 49-42=7$ 个. S 中的 $3(2k-1)$ 型数共有 16 个$\left(k\leqslant\left[\frac{98+3}{6}\right]=16\right)$，其中至少有 $16-7=9$ 个在 T 中，取这 9 个在 T 中的 $6k-3$ 型数以及大于或等于 61 的素数 x，共 10 个数，组成 T 的 10 元子集，前 9 个数有公因数 3，而 x 与这 9 个数互素，故 T 合乎要求.

综上，$n=50$ 合乎要求，最小自然数 $n=50$.

4 求所有大于 3 的自然数 n，使得 $1+C_n^1+C_n^2+C_n^3$ 整除 $2^{2\,000}$.

解 因 2 是素数，故只须考虑哪些自然数 $n>3$，能使

$$1+C_n^1+C_n^2+C_n^3=2^k, k\in\mathbf{N}$$

经计算得

$$1+C_n^1+C_n^2+C_n^3=$$
$$1+n+\frac{n(n-1)}{2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{6}=$$
$$\frac{(n+1)(n^2-n+6)}{6}$$

即
$$(n+1)(n^2-n+6)=3\times 2^{k+1}$$

作代换 $m=n+1$ 得

$$m(m^2-3m+8)=3\times 2^{k+1} \quad ①$$

由 ① 知我们必须对 m 分两种情形分别讨论之.

i 若 $m=2^s(m>4,s\geqslant 3)$，则

$$m^2-3m+8=3\times 2^t, t\in\mathbf{N}$$

如果 $s\geqslant 4$，那么 $3\times 2^t\equiv 8 \pmod{16}$，即 $2^t\equiv 8\pmod{16}$. 由此可知 $2^t=8(t=3)$，$m^2-3m+8=24$，即 $m(m-3)=16$，这不可能. 因而只有 $s=3, m=8$，即 $n=7$.

ii 若 $m=3\times 2^u(m>4,u\geqslant 1)$，则

$$m^2-3m+8=2^v, v\in\mathbf{N} \quad ②$$

如果 $u\geqslant 4$，那么 $2^v\equiv 8\pmod{16}$，由 i 知 $v=3$，$m(m-3)=0$，这也不可能. 另外，当 $m=3\times 2$ 或 $m=3\times 2^2$ 都不能使 ② 成立，因此，只有 $m=3\times 2^3=24$，即 $n=23$.

又经检验知，$1+C_7^1+C_7^2+C_7^3=64=2^6$ 和 $1+C_{23}^1+C_{23}^2+C_{23}^3=2^{11}$ 都能整除 $2^{2\,000}$，故本题的答案是 $n=7$ 及 $n=23$.

5 设 D 为锐角 $\triangle ABC$ 内部一点,且满足条件:$DA \cdot DB \cdot AB + DB \cdot DC \cdot BC + DC \cdot DA \cdot CA = AB \cdot BC \cdot CA$.试确定点 D 的几何位置,并证明你的结论.

证明 此题我们改证比其更强的命题如下:

设 D 为锐角 $\triangle ABC$ 内部一点.求证:

$$DA \cdot DB \cdot AB + DB \cdot DC \cdot BC + DC \cdot DA \cdot CA \geqslant AB \cdot BC \cdot CA \quad (*)$$

并且等号当且仅当 D 为 $\triangle ABC$ 的垂心时才成立.

如图1,作 $ED \mathrel{\underline{\parallel}} BC$,$FA \mathrel{\underline{\parallel}} ED$,则 $BCDE$ 和 $ADEF$ 均是平行四边形.联结 BF 和 AE,显然 $BCAF$ 也是平行四边形.于是

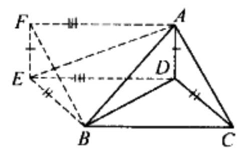


图1

$$AF = ED = BC$$

$$EF = AD, EB = CD, BF = AC$$

在四边形 $ABEF$ 和 $AEBD$ 中,由托勒密不等式得

$$AB \cdot EF + AF \cdot BE \geqslant AE \cdot BF$$

$$BD \cdot AE + AD \cdot BE \geqslant AB \cdot ED$$

即

$$AB \cdot AD + BC \cdot CD \geqslant AE \cdot AC \quad ①$$

$$BD \cdot AE + AD \cdot CD \geqslant AB \cdot BC \quad ②$$

于是,由①和②可得

$$DA \cdot DB \cdot AB + DB \cdot DC \cdot BC + DC \cdot DA \cdot CA =$$

$$DB(AB \cdot AD + BC \cdot CD) + DC \cdot DA \cdot CA \geqslant$$

$$DB \cdot AE \cdot AC + DC \cdot DA \cdot AC =$$

$$AC(DB \cdot AE + DC \cdot AD) =$$

$$AC \cdot BC \cdot AB$$

故式(*)得证,且等号成立的充分必要条件是①和②的等号同时都成立,即等号当且仅当 $ABEF$ 及 $AEBD$ 都是圆内接四边形时成立,亦即 $AFEBD$ 恰是圆内接五边形时等号成立.由于 $AFED$ 为平行四边形,所以条件等价于 $AFED$ 为矩形(即 $AD \perp BC$)且 $\angle ABE = \angle ADE = 90°$,亦等价于 $AD \perp BC$ 且 $CD \perp AB$,所以式(*)等式成立的充分必要条件是 D 为 $\triangle ABC$ 的垂心.

6 设 $n \geqslant 2, x_1, x_2, \cdots, x_n$ 均为实数,且 $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum\limits_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1} = 1$.对于每一个固定的 $k(k \in \mathbf{N}, 1 \leqslant k \leqslant n)$,求 $|x_k|$ 的最大值.

解 由已知条件得

$$2\sum_{i=1}^{n}x_i^2+2\sum_{i=1}^{n-1}x_ix_{i+1}=2$$

即

$$x_1^2+(x_1+x_2)^2+(x_2+x_3)^2+\cdots+(x_{n-2}+x_{n-1})^2+(x_{n-1}+x_n)^2+x_n^2=2 \quad ①$$

由均值不等式得

$$\sqrt{\frac{x_1^2+(x_1+x_2)^2+\cdots+(x_{k-1}+x_k)^2}{k}}\geqslant$$

$$\frac{|x_1|+|x_1+x_2|+\cdots+|x_{k-1}+x_k|}{k}\geqslant$$

$$\frac{|x_1-(x_1+x_2)+\cdots+(-1)^{k-1}(x_{k-1}+x_k)|}{k}=$$

$$\frac{|x_k|}{k}$$

即

$$x_1^2+(x_1+x_2)^2+\cdots+(x_{k-1}+x_k)^2\geqslant\frac{x_k^2}{k} \quad ②$$

同理

$$\sqrt{\frac{(x_k+x_{k+1})^2+\cdots+(x_{n-1}+x_n)^2+x_n^2}{n-k+1}}\geqslant$$

$$\frac{|x_k+x_{k+1}|+\cdots+|x_{n-1}+x_n|+|x_n|}{n-k+1}\geqslant$$

$$\frac{|x_n-(x_{n-1}+x_n)+\cdots+(-1)^{n-k}(x_k+x_{k+1})|}{n-k+1}=$$

$$\frac{|x_k|}{n-k+1}$$

即

$$(x_k+x_{k+1})^2+\cdots+(x_{n-1}+x_n)^2+x_n^2\geqslant\frac{x_k^2}{n-k+1} \quad ③$$

由 ② + ③ 及 ① 得

$$2\geqslant\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{n-k+1}\right)x_k^2$$

即

$$|x_k|\leqslant\sqrt{\frac{2k(n+1-k)}{n+1}},k=1,2,\cdots,n \quad ④$$

由上可知,当且仅当

$$x_1=-(x_1+x_2)=x_2+x_3=\cdots=(-1)^{k-1}(x_{k-1}+x_k)$$

及
$$x_k+x_{k+1}=-(x_{k+1}+x_{k+2})=\cdots=(-1)^{n-k}x_n$$

时,④ 中的等号成立,即当且仅当

$$x_i = x_k(-1)^{i-k}\frac{i}{k}, i = 1,2,\cdots,k-1$$

且 $$x_j = x_k(-1)^{j-k}\frac{n+1-j}{n-k+1}, j = k+1,k+2,\cdots,n$$

时 $$|x_k| = \sqrt{\frac{2k(n+1-k)}{n+1}}$$

综上所述,可得

$$|x_k|_{\max} = \sqrt{\frac{2k(n+1-k)}{n+1}}$$

第14届中国数学奥林匹克

北京,1999

1 在锐角$\triangle ABC$中,$\angle C>\angle B$.点D是边BC上一点,使得$\angle ADB$是钝角,H是$\triangle ABD$的垂心,点F在$\triangle ABC$内部且在$\triangle ABD$的外接圆周上.求证:点F是$\triangle ABC$垂心的充分必要条件是:HD平行于CF且H在$\triangle ABC$的外接圆周上.

证明 首先指出一简单有用的事实:设在$\triangle UVW$中,$\angle UVW$和$\angle VWU$都是锐角,则

点P是$\triangle UVW$的垂心$\Leftrightarrow UP\perp VW$,并且$\angle VPW=\pi-\angle VUW$

下面利用此简单事实证明题目的结论(严格讲,应严格证明).

i 如果HD平行于CF,并且H在$\triangle ABC$的外接圆上,那么$CF\perp AB$,并且

$$\angle AFB=\angle ADB=\pi-\angle AHB=\pi-\angle ACB$$

因此,点F是$\triangle ABC$的垂心.

ii 如果F是$\triangle ABC$的垂心,那么,显然$HD\parallel CF$,并且

$$\angle ACB=\pi-\angle AFB=\pi-\angle ADB=\angle AHB$$

因此,A,B,C,H四点共圆.

2 给定实数a,设实多项式序列$\{f_n(x)\}$满足

$$\begin{cases}f_0(x)=1\\f_{n+1}(x)=xf_n(x)+f_n(ax),n=0,1,2,\cdots\end{cases}$$

(1) 求证:

$$f_n(x)=x^nf_n\left(\frac{1}{x}\right),n=0,1,2,\cdots$$

(2) 求$f_n(x)$的明显表达式.

证明 i 约定记

$$F_k(x)=(x-1)f_k(x)+f_k(ax)-a^kxf_k\left(\frac{x}{a}\right)$$

首先指出

$$F_{k+1}(x) = xF_k(x) + F_k(ax)$$

事实上

$$F_{k+1}(x) - xF_k(x) =$$

$$(x-1)f_{k+1}(x) + f_{k+1}(ax) - a^{k+1}xf_{k+1}\left(\frac{x}{a}\right) -$$

$$x(x-1)f_k(x) - xf_k(ax) + a^kx^2f_k\left(\frac{x}{a}\right) =$$

$$(x-1)(xf_k(x) + f_k(ax)) + (axf_k(ax) + f_k(a^2x)) -$$

$$a^{k+1}x\left(\frac{x}{a}f_k\left(\frac{x}{a}\right) + f_k(x)\right) - x(x-1)f_k(x) -$$

$$xf_k(ax) + a^kx^2f_k\left(\frac{x}{a}\right) =$$

$$(ax-1)f_k(ax) + f_k(a^2x) - a^{k+1}xf_k(x) = F_k(ax)$$

因为 $$F_0(x) = 0$$

所以 $$F_n(x) = 0, n = 0,1,2,\cdots$$

ii 利用 i 中的结论，我们归纳证明

$$f_k(x) = x^nf_n\left(\frac{1}{x}\right), n = 0,1,2,\cdots$$

首先，显然 $$f_0(x) = x^0f_0\left(\frac{1}{x}\right)$$

假定已证得 $$f_k(x) = x^kf_k\left(\frac{1}{x}\right)$$

则有 $$f_{k+1}(x) - x^{k+1}f_{k+1}\left(\frac{1}{x}\right) =$$

$$f_{k+1}(x) - x^{k+1}f_{k+1}\left(\frac{1}{x}\right) - \left(f_k(x) - x^kf_k\left(\frac{1}{x}\right)\right) =$$

$$(x-1)f_k(x) + f_k(ax)$$

$$- x^{k+1}\left(\frac{1}{x}f_k\left(\frac{1}{x}\right) + f_k\left(\frac{a}{x}\right)\right) + x^kf_k\left(\frac{1}{x}\right) =$$

$$(x-1)f_k(x) + f_k(ax) - a^kx\left(\left(\frac{x}{a}\right)^kf_k\left(\frac{a}{x}\right)\right) =$$

$$(x-1)f_k(x) + f_k(ax) - a^kxf_k\left(\frac{x}{a}\right) = 0$$

iii 不妨设

$$f_k(x) = \sum_{j=1}^{k} b_j^{(k)}x^j, k = 0,1,\cdots$$

由题目的条件容易看出

$$b_k^{(k)} = b_{k-1}^{(k-1)} = \cdots = b_0^{(0)} = 1$$

另据 ii 中证明得的结论可得

$$b_{k-j}^{(k)} = b_j^{(k)}, k = 0,1,\cdots; j = 0,1,\cdots,k$$

特别地 $$b_0^{(k)} = b_k^{(k)} = 1, k = 0,1,2,\cdots$$

在式子 $f_n(x) = xf_{n-1}(x) + f_{n-1}(ax)$ 之中，比较两边 x^j 和 x^{n-j} 的系数，分别得到

$$b_j^{(n)} = b_{j-1}^{(n-1)} + a^j b_j^{(n-1)}$$
$$b_{n-j}^{(n)} = b_{n-j-1}^{(n-1)} + a^{n-j} b_{n-j}^{(n-1)}$$

利用等式关系

$$b_{n-j}^{(n)} = b_j^{(n)}$$
$$b_{n-j-1}^{(n-1)} = b_j^{(n-1)}$$
$$b_{n-j}^{(n-1)} = b_{j-1}^{(n-1)}$$

可以从前列两式中消去 $b_{n-1-j}^{(n-1)} = b_j^{(n-1)}$，从而得到

$$\begin{aligned} b_j^{(n)} &= \frac{a^n-1}{a^j-1} b_{j-1}^{(n-1)} = \\ &\frac{a^n-1}{a^j-1} \cdot \frac{a^{(n-1)}-1}{a^{j-1}-1} b_{j-2}^{(n-2)} = \cdots = \\ &\frac{a^n-1}{a^j-1} \cdot \frac{a^{(n-1)}-1}{a^{j-1}-1} \cdot \cdots \cdot \frac{a^{n-j+1}-1}{a-1} b_0^{(n-j)} = \\ &\frac{a^n-1}{a^j-1} \cdot \frac{a^{(n-1)}-1}{a^{j-1}-1} \cdot \cdots \cdot \frac{a^{n-j+1}-1}{a-1} \end{aligned}$$

我们得到

$$f_n(x) = 1 + \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{a^n-1}{a^j-1} \cdot \cdots \frac{a^{n-j+1}-1}{a-1} \right) x^j$$

3 MO 太空城由 99 个空间站组成.任两空间站之间有管形通道相连.规定其中 99 条通道为双向通行的主干道,其余通道严格单向通行.如果某四个空间站可以通过它们之间的通道从其中任一站到达另外任一站,则称这四个站的集合为一个互通四站组.

试为 MO 太空城设计一个方案,使得互通四站组的数目最大(请具体算出该最大数,并证明你的结论).

证明 在下面的讨论中,设 n 是大于 3 的奇数,并记 $m = \frac{n-3}{2}$.我们将讨论 n 个空间站和 n 条双行主干道的更一般情形.对于本题而言 $n = 99, m = \frac{n-3}{2} = 48$.

(1) 如果某四个空间站中,有一个站与其他三站间的通道都从该站单向发出.那么,这四站的集合必定是不互通的四站组.约定将所有这样的不互通四站组归入 S 类;并将所有不属于 S 类的不互通四站组归入 T 类,则互通四站组的总数为

$$C_n^4 - |S| - |T|$$

用 $1,2,\cdots,n$ 给 n 个空间站编号.设从第 i 号空间站发出的单行通道数为 s_i,则 S 类不互通四站组的总数为 $|S| = \sum_{i=1}^{n} C_{s_i}^3$,这里

$$C_k^3 = \frac{k(k-1)(k-2)}{6}$$

(2) 对于如上定义的 C_k^3 和 $C_k^2 = \frac{k(k-1)}{2}$,熟知有关系(可直接验证)

$$C_k^3 = C_{k-1}^3 + C_{k-1}^2$$

如果 $s > t+1$,那么

$$C_s^3 - C_{s-1}^3 = C_{s-1}^2 > C_t^2 = C_{t+1}^3 - C_t^3$$

即

$$C_s^3 + C_t^s > C_{s-1}^3 + C_{t+1}^3$$

根据以上探讨,通过"调整法"可以断定

$$|S| = \sum_{i=1}^{n} C_{s_i}^3 \geqslant nC_m^3$$

其中

$$m = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} s_i = \frac{1}{n}(C_n^2 - n) = \frac{n-3}{2}$$

据此估计互通四站组总数的上界为

$$C_n^4 - |S| - |T| \leqslant C_n^4 - nC_m^3$$

(3) 如果能设计一个方案,使得 S 类不互通四站组的数目降到最小值 nC_m^3,并且 T 类不互通四站组的数目也降到最少(实际降到 0),那么,该方案的互通四站组的数目达到最大.

为此目的,首先将编号为 $1,2,\cdots,n$ 的空间站依顺时针次序安排在一个圆周上.下面将给出满足要求的两种方案.

第一方案 首先将沿圆周相邻的空间站对之间的通道定为主干道.这样设定了 n 条主干道

$$\{1,2\},\{2,3\},\cdots,\{n-1,n\},\{n,1\}$$

对于 $i,j \in \{1,2,\cdots,n\}, i \neq j$,如果圆周上沿顺时针方向从 i 到 j 的弧经过奇数个中间站,那么,规定 i 号站与 j 号站之间的通道为 $i \to j$ 单行道.因为 n 是奇数,从 k 到 l 的顺时针圆弧和从 l 到 k 的顺时针圆弧当中,恰有一条经过奇数个中间站,所以上述单行约定不会导致矛盾情形.

按照此方案,从每个空间发出的单行道都为 $m = \frac{n-3}{2}$ 条.因此,S 类不互通四站组总数降至最小值

$$|S| = nC_m^3$$

下面将指出,按照此方案有 $|T| = 0$.

如果四站组中某两站间有主干道相连,那么,四站组中其余任一站都与这两站互通.因此,这样的四站组为互通四站组.

考察从四站组的某三站到剩下一站的三条通道都单向通往这剩下一站的情形.设在除去剩下一站 D 的圆周上,所述的三站按顺时针方向依次为 A,B,C.因为 $A \to D, B \to D, C \to D$,根据方案的单行规定可以判断 A 与 B 之间和 A 与 D 之间的顺时针圆弧

上各经过奇数个中间站.我们判明通道 $A\to B,A\to C,A\to D$ 的单行方向,因此,这样的不互通四站组$\{A,B,C,D\}$应归入 S 类.

根据以上的讨论,可以断定 $|T|=0$.

最后,算出互通四站组数的最大值

$$C_n^4-nC_m^3=\frac{n(n-3)}{48}(n^2+6n-31)$$

对于 $n=99$,互通四站组数的最大值为

$$99\times\frac{96}{48}\times(9\,801+594-31)=$$

$$99\times2\times10\,364=2\,052\,072$$

第二方案 (同样先将编号为 $1,2,\cdots,n$ 的空间站按顺时针次序安排于一个圆周上.)

如果从 a 号空间站到 b 号空间站的顺时针圆弧恰经过$\frac{n-3}{2}$个或者$\frac{n-1}{2}$个中间站,那么,规定 a 与 b 间的通道为双行主干道.如果从 i 号空间站到 j 号空间站的顺时针圆弧经过的中间站数少于$\frac{n-3}{2}$,则规定 i 与 j 之间的通道单向从 i 通往 j.

按照此方案,从每个空间站发出的单行通道数都为 $m=\frac{n-3}{2}$ 条.因此,S 类不互通四站组数降至最小值

$$|S|=nC_m^3$$

按照此方案,同样可证 $|T|=0$.事实上,与第一方案类似的验证讨论,可以判定:如果某四站组中有两站间的通道是主干道,那么,这四站组是互通的.还可以判定:如果从四站组中某三站到剩下一站 D 的通道都单向通往该站,那么,这三站在除去点 D 的圆周上顺时针方向排头的一站 A 通往其他三站 B,C,D 的通道都单向发出:$A\to B,A\to C,A\to D$.因此,这类四站组$\{A,B,C,D\}$应归入 S 类.

因此,按照此方案建造的太空城,没有 T 类不互通四站组,并且互通四站组数达到最大.剩下的计算同第一方案.

注 有一些不正确的设计方案虽然能使各站发出的单行通道数目相等,却不能排除如图 1 所示的那种不互通四站组,因而不能使互通四站组的数目达到最大.

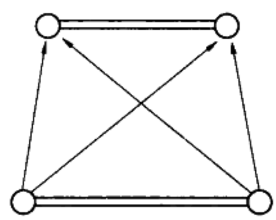


图 1

4 设 m 是给定的整数.求证:存在整数 a,b 和 k,其中 a,b 不能被 2 整除,$k\geqslant0$,使得

$$2m=a^{19}+b^{99}+k\cdot2^{1\,999}$$

证明 (1) 设 r 和 s 是正整数,其中 r 是奇数.如果 x 和 y 是

mod 2^r 互不同余的奇数,那么,x^s 和 y^s 也使 mod 2^r 互不同余.这是因为

$$x^s - y^s = (x - y)(x^{s-1} + x^{s-2}y + \cdots + y^{s-1})$$

并且 $(x^{s-1} + x^{s-2}y + \cdots + y^{s-1})$ 是奇数.

因此,当 t 取遍 mod 2^r 的既约剩余系(又称缩剩余系)时,t^s 也取遍 mod 2^r 的既约剩余系.

(2) 根据(1)中的讨论,对于奇数 $2m - 1$,必有奇数 a 使得 $2m - 1 = a^{19} + q2^{1999}$. 于是对于 $b = 1$,有

$$2m = a^{19} + b^{99} + q2^{1999}$$

如果 $q \geqslant 0$,那么,题目的结论已得证.

如果 $q < 0$,那么,分别以 $\tilde{a} = a - h2^{1999}$ 和

$$\tilde{q} = \frac{a^{19} - (a - ha^{1999})^{19}}{2^{1999}} + q = \frac{(h2^{1999} - a)^{19} + a^{19}}{2^{1999}} + q$$

代替 a 和 q,仍有

$$2m = \tilde{a}^{19} + 1^{99} + \tilde{q}2^{1999}$$

取 h 足够大可使 $\tilde{q} \geqslant 0$.

于是,题目的结论得到完全的证明.

5 求最大的实数 λ,使得当实系数多项式 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 的所有根都是非负实数时,只要 $x \geqslant 0$,就有

$$f(x) \geqslant \lambda(x - a)^3$$

并问上式中等号何时成立?

解 设 $f(x)$ 的三个根为 α, β, γ,并设 $0 \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma$,则有

$$x - a = x + \alpha + \beta + \gamma$$

$$f(x) = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$$

(1) 当 $0 \leqslant x \leqslant \alpha$ 时,由于

$$-f(x) = (\alpha - x)(\beta - x)(\gamma - x)$$

利用均值不等式可得

$$-f(x) \leqslant \left(\frac{\alpha + \beta + \gamma - 3x}{3}\right)^3 \leqslant \left(\frac{x + \alpha + \beta + \gamma}{3}\right)^3$$

即

$$f(x) \geqslant -\frac{1}{27}(x + \alpha + \beta + \gamma)^3 = -\frac{1}{27}(x - a)^3$$

显然,上式等号成立的充分必要条件是

$$\begin{cases}\alpha - x = \beta - x = \gamma - x \\ \alpha + \beta + \gamma - 3x = x + \alpha + \beta + \gamma\end{cases}$$

即
$$x = 0, \alpha = \beta = \gamma$$

(2) 当 $\beta \leqslant x \leqslant \gamma$ 时,由于

$$-f(x) = (x-\alpha)(x-\beta)(\gamma - x) \leqslant \left(\frac{x+\gamma-\alpha-\beta}{3}\right)^3 \leqslant \left(\frac{x+\alpha+\beta+\gamma}{3}\right)^3 = \left(\frac{x-a}{3}\right)^3$$

则
$$f(x) \geqslant -\frac{1}{27}(x-a)^3$$

易知上式等号成立的充分必要条件为

$$\begin{cases}x - \alpha = x - \beta = \gamma - x \\ \alpha = \beta = 0\end{cases}$$

即
$$\alpha = \beta = 0, \gamma = 2x$$

(3) 当 $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$ 或者 $x > \gamma$ 时

$$f(x) > 0 \geqslant -\frac{1}{27}(x-a)^3$$

综上可得,所求之 $\lambda = -\frac{1}{27}$ 且等号成立的充要条件是 $x = 0$, $\alpha = \beta = \gamma$ 或者 $\alpha = \beta = 0, \gamma = 2x$.

6 设 $4\times4\times4$ 的大正方体由 64 个单位正方体组成. 选取其中的 16 个单位正方体涂成红色,使得大正方体中每个由 4 个单位正方体构成的 $1\times1\times4$ 的小长方体中,都恰有 1 个红正方体. 问 16 个红正方体共有多少种不同取法?说明理由.

解 选择 $4\times4\times4$ 大正方体的某个 4×4 侧面作为基准面. 将大正方体划分成平行于基准面的四层(每层为 $4\times4\times1$ 方体), 依次用 1,2,3,4 给各层编号. 将各个涂红单位方体投影到基准面上并在投影方格内填写该红色单位方体所在的层号. 这样,我们得到一个 4×4 方格表,每格填写 $\{1,2,3,4\}$ 中的一个数,填同样数的方格既不同行也不同列. 这样一个 4×4 方格表被称为一个 4 阶拉丁方. 反之,每一个 4 阶拉丁方唯一决定了符合题目要求的一种涂色法,不同的拉丁方决定不同的涂色法. 因此,题目转化为确定总共有多少不同的 4 阶拉丁方.

约定如表 1 那样用 (i,j) 标示 4×4 方格表中各单位方格的位置. 对于 $(1,2,3,4)$ 的任一排列 (a,b,c,d),我们来考察如图 1 所示的拉丁方的个数,为此目的,先考察如图 2 所示的拉丁方的个

数.

表 1

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)

a	b	c	d

图 1

a	b	c	d
b			
c			
d			

图 2

图 2 的(2,2) 方格可填写 $\{a,c,d\}$ 中的任一个数,以下分别考察这三种情形.

i 设图 2 的(2,2) 方格填写 a.

对此情形,在(2,3) 和(3,2) 方格内只能填写 d.

接着在(2,4) 和(4,2) 方格内只能填写 c;然后在(3,3) 方格内可以填写 a 或 b.当(3,3) 方格选定一种填写之后,剩下 3 个方格的填写法唯一确定.因此,相应本情形的拉丁方恰有 2 个.

ii 设图 2 的(2,2) 方格填写 c.

对此情形,在(2,4) 和(4,2) 方格内只能填写 a;接着在(2,3) 和(3,2) 方格内只能填写 d;然后在(3,4) 和(4,3) 方格内可以填写 b.在这些方格填写后,剩下方格的填写法唯一确定.因此,相应本情形的拉丁方恰有 1 个.

iii 设图 2 的(2,2) 方格填写 d.

与 ii 所述情形类似,对本情形可以判定只有唯一的填写法,即恰有一个拉丁方.

根据以上讨论,如图 2 所示的那类拉丁方恰有 4 个.每个这样的拉丁方通过第 2,3,4 行的置换产生 3!个不同的如图 1 所示的那类拉丁方.因此,如图 1 所示的那类拉丁方恰有 $4\times 3!$个.最后,因为排列(a,b,c,d) 有 4!个,所以 4 阶拉丁方总共有$(4!)^2$ 个.

故题目所述的 16 个涂色方体的选取办法总共有$(4!)^2=576$

种.

注 考虑更一般的问题,在 $n\times n\times n$ 大正方体中选 n^2 个单位方体涂红,要求任何一个由 n 个单位正方体组成的 $1\times1\times n$ 长方体中都恰有一个涂红的单位正方体.问满足上述要求的 n^2 个涂红单位正方体有多少种不同选取办法?

仿照上面的解答,可以将问题转化为求不同的 n 阶拉丁方的数目 L_n.通常将第一行和第一列都是标准排列$(1,2.\cdots,n)$的 n 阶拉丁方的数目记为 l_n,于是

$$L_n=(n!)((n-1)!)l_n$$

随着 n 的增大,l_n 和 L_n 急剧增大.人们仅对较小的 n 算出了 l_n,如表 2 所示.

表 2

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
l_n	1	1	1	4	56	9 408	16 942 080	…	…

对于 $n\geqslant5$ 情形,必须分析相当多的情形,才能无重无漏地准确算出相当大的数 l_n,这很难在短时间内办到.因此,题目选择 $n=4$ 情形可以说恰到好处.

第 15 届中国数学奥林匹克

合肥,2000

1 设 a,b,c 为 $\triangle ABC$ 的三条边,$a\leqslant b\leqslant c$,R 和 r 分别为 $\triangle ABC$ 的外接圆半径和内切圆半径,令 $f=a+b-2R-2r$,试用 $\angle C$ 的大小来判定 f 的符号.

解 用 A,B,C 分别表示 $\triangle ABC$ 的三个内角.熟知

$$a=2R\sin A,b=2R\sin B$$

$$r=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

于是

$$\begin{aligned}f=&2R\left(\sin A+\sin B-1-4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)=\\&2R\left(2\sin\frac{B+A}{2}\cos\frac{B-A}{2}-1+\right.\\&\left.2\left(\cos\frac{B+A}{2}-\cos\frac{B-A}{2}\right)\sin\frac{C}{2}\right)=\\&4R\cos\frac{B-A}{2}\left(\sin\frac{B+A}{2}-\sin\frac{C}{2}\right)-\\&2R+4R\cos\frac{\pi-C}{2}\sin\frac{C}{2}=\\&4R\cos\frac{B-A}{2}\left(\sin\frac{\pi-C}{2}-\sin\frac{C}{2}\right)-2R+4R\sin^2\frac{C}{2}=\\&4R\cos\frac{B-A}{2}\left(\cos\frac{C}{2}-\sin\frac{C}{2}\right)-\\&2R\left(\cos^2\frac{C}{2}-\sin^2\frac{C}{2}\right)=\\&2R\left(\cos\frac{C}{2}-\sin\frac{C}{2}\right)\left(2\cos\frac{B-A}{2}-\cos\frac{C}{2}-\sin\frac{C}{2}\right)\end{aligned}$$

令 $A\leqslant B\leqslant C$,所以

$$0\leqslant B-A<B\leqslant C$$

又 $0\leqslant B-A<B+A$,因此

$$\cos\frac{B-A}{2}>\cos\frac{C}{2}$$

$$\cos\frac{B-A}{2}>\cos\frac{B+A}{2}=\cos\frac{\pi-C}{2}=\sin\frac{C}{2}$$

所以
$$2\cos\frac{B-A}{2} > \cos\frac{C}{2} + \sin\frac{C}{2}$$

则
$$f > 0 \Leftrightarrow \cos\frac{C}{2} > \sin\frac{C}{2} \Leftrightarrow C < \frac{\pi}{2}$$
$$f = 0 \Leftrightarrow \cos\frac{C}{2} = \sin\frac{C}{2} \Leftrightarrow C = \frac{\pi}{2}$$
$$f < 0 \Leftrightarrow \cos\frac{C}{2} < \sin\frac{C}{2} \Leftrightarrow C > \frac{\pi}{2}$$

2 数列 $\{a_n\}$ 定义如下：$a_1 = 0, a_2 = 1, a_n = \frac{1}{2}na_{n-1} + \frac{1}{2}n(n-1)a_{n-2} + (-1)^n(1-\frac{n}{2}), n \geqslant 3$. 试求 $f_n = a_n + 2C_n^1 a_{n-1} + 3C_n^2 a_{n-2} + \cdots + (n-1)C_n^{n-2}a_2 + nC_n^{n-1}a_1$ 的最简表达式.

解 令 $b_n = \frac{a_n}{n!}$，则
$$b_1 = 0, b_2 = \frac{1}{2}, b_3 = \frac{1}{3}$$
$$b_n = \frac{1}{2}(b_{n-1} + b_{n-2}) + (-1)^n \frac{1-\frac{n}{2}}{n!}$$

令
$$g_n = \frac{1}{n!}f_n = \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)C_n^{n-k}a_k = \sum_{k=1}^{n}\frac{n-k+1}{(n-k)!}b_k$$

所以
$$g_{n+1} - g_n = \sum_{k=1}^{n+1}\frac{n-k+2}{(n+1-k)!}b_k - \sum_{k=1}^{n}\frac{n-k+1}{(n-k)!}b_k = \sum_{k=2}^{n+1}\frac{n-k+2}{(n+1-k)!}b_k - \sum_{k=2}^{n+1}\frac{n-k+2}{(n-k+1)!}b_{k-1} = \sum_{k=2}^{n+1}\frac{n-k+2}{(n+1-k)!}(b_k - b_{k-1})$$

但是令 $d_n = (-2)^n(b_n - b_{n-1})$，则
$$d_n = d_{n-1} + \left(1-\frac{n}{2}\right)\frac{2^n}{n!}$$

所以
$$d_2 = 2$$
$$d_n = 2 + \sum_{l=3}^{n}\left(1-\frac{l}{2}\right)\frac{2^l}{l!} = \frac{2^n}{n!}$$

故
$$b_n - b_{n-1} = \frac{d_n}{(-2)^n} = \frac{2^n}{(-2)^n n!} = \frac{(-1)^n}{n!}$$

所以 $g_{n+1}-g_n=\sum_{k=2}^{n+1}\frac{n+2-k}{(n+1-k)!}\cdot\frac{(-1)^k}{k!}=$

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{(-1)^k}{(n-k)!k!}+\sum_{k=2}^{n+1}\frac{(-1)^k}{(n+1-k)!k!}=$$

$$\frac{1}{n!}\sum_{k=2}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}+\frac{1}{(n+1)!}\cdot\sum_{k=2}^{n+1}(-1)^k\cdot\binom{n+1}{k}$$

因为

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=0$$

$$\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k\binom{n+1}{k}=0$$

所以 $g_{n+1}-g_n=-\frac{1}{n!}(1-n)-\frac{1}{(n+1)!}(1-(n+1))=\frac{1}{(n-1)!}-\frac{1}{(n+1)!}$

由于 $g_3=2b_2+b_3=\frac{4}{3}$，则

$$f_n=n!g_n=n!\left(\sum_{k=4}^{n}\frac{1}{(k-2)!}-\sum_{k=4}^{n}\frac{1}{k!}+g_3\right)=$$

$$n!\left(g_3+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{n+1}{n!}\right)=$$

$$2\cdot n!-(n+1)$$

3 某乒乓球俱乐部组织交流活动，安排符合以下规则的双打赛程表，规则为：

(1) 每名参加者至多属于两个对子；

(2) 任意两个不同对子之间至多进行一次双打；

(3) 凡表中同属一对的两人就不在任何双打中作为对手相遇.

统计各人参加的双打次数，约定将所有不同的次数组成的集合称为"赛次集".

给定由不同的正整数组成的集合 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}$，其中每个数都能被 6 整除. 试问最少必须有多少人参加活动，才可以安排符合上述规则的赛程表，使得相应的赛次集恰为 A. 请证明你的结论.

解 (1) 设 $a_1<a_2<\cdots<a_k$，并设所安排的赛程表中某参加者的赛次为 a_k.

若该参加者仅属一个对子，则另有 a_k 对与该对进行双打，因而至少另有 a_k 人，总人数不少于 a_k+2.

若赛次为 a_k 的参加者属两个对子，则至少另有 $\frac{a_k}{2}$ 对与这两对进行双打，因而至少另有 $\frac{a_k}{2}$ 人，总人数不少于 $\frac{a_k}{2}+3(<a_k+2)$.

因此，参加者总数不少于 $\frac{a_k}{2}+3$.

(2) 设 $a_1<a_2<\cdots<a_k$. 将证明，若有 $\frac{a_k}{2}+3$ 名参加者，则可安排符合规则的赛程表，使得相应的赛次集恰为 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}$，并且每名参加者都属两个对子. 将对 k 作归纳完成这一结论的证明.

i $k=1$ 时，将 $\frac{a_1}{2}+3$ 人分成三人小组，每小组中任两人结为对子，所有不同组的对子进行双打. 于是，每人的赛次都为

$$2\times\frac{a_1}{2}=a_1$$

ii $k=2$ 时，将 $\frac{a_2}{2}+3$ 人分成 S 和 T 两大组，要求

$$|S|=\frac{a_1}{2},\ |T|=\frac{a_2-a_1}{2}+3$$

将 S 和 T 各分成三人小组，每个三人小组中的任两人结为对子.

安排 S 大组的每个三人小组中的对子与该三人组以外所有其他对子进行双打；安排 T 大组的每个三人小组中的对子只与 S 大组中的对子进行双打. 于是，S 大组中每人的赛次为

$$2\left(\frac{a_1}{2}-3+\frac{a_2-a_1}{2}+3\right)=a_2$$

T 大组中每人的赛次为

$$2\times\frac{a_1}{2}=a_1$$

iii 假定对于 $k=h-1$ 和 $k=h$ 情形所述结论成立，考察 $k=h+1$ 情形，即

$$A=\{a_1,\cdots,a_h,a_{h+1}\}$$
$$a_1<a_2<\cdots<a_h<a_{h+1}$$

设有 $\frac{a_{h+1}}{2}+3$ 名参加者，将这些参加者分成 S,T 和 U 三大组，要求

$$|S|=\frac{a_1}{2},\ |T|=\frac{a_h-a_1}{2}+3,\ |U|=\frac{a_{h+1}-a_h}{2}$$

再将 S,T,U 三大组各分成三人小组，每一小组内的任两人结成对子.

安排 S 大组每个三人组的对子与各大组中所有其他的对子

进行双打.

安排 T 大组每个三人组的对子都与 S 大组中的对子进行双打,另外,还在 T 大组内安排赛次集为

$$A' = \{a_2 - a_1, \cdots, a_h - a_1\}$$

的 T 大组内的赛程(根据归纳假设,这样的安排可实现).

安排 U 大组每个三人组的对子只与 S 大组中的对子进行双打.

这样安排的赛程表符合规则.

S 大组内参加者的赛次为

$$2\left(\frac{a_1}{2} - 3 + \frac{a_h - a_1}{2} + 3 + \frac{a_{h+1} + a_h}{2}\right) = a_{h+1}$$

T 大组内参加者的赛次分别为以下这些数

$$2 \times \frac{a_1}{2} + (a_j - a_1) = a_j, j = 2, \cdots, h$$

U 大组内参加者的赛次为

$$2 \times \frac{a_1}{2} = a_1$$

因此,与所安排的赛程表相应的赛次集恰为

$$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_h, a_{h+1}\}$$

至此,我们证明了如下结论:

如果 $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$, $a_1 < a_2 < \cdots < a_k$,并且有 $\frac{a_k}{2} + 3$ 名参加者,那么,可安排符合规则的赛程表,使得相应的赛次表恰为 A,并且 $\frac{a_k}{2} + 3$ 是满足上述要求的最少参加者人数.

4 设 $n \geqslant 2$,对 n 元有序实数组

$$A = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$$

令
$$b_k = \max_{1 \leqslant i \leqslant k} a_i, k = 1, 2, \cdots, n$$

称 $B = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$ 为 A 的"创新数组",称 B 中的不同元素个数为 A 的"创新阶数".

考察 $1, 2, \cdots, n$ 的所有排列(将每种排列都视为一个有序数组),对其中创新阶数为 2 的所有排列,求它们的每一项的算术平均值.

解 设 $a_1 = m$,则 m 可为 $1, \cdots, n - 1$ 中任何一个.

当 $a_1 = m$ 时,称 $m + 1, \cdots, n$ 为"大数",$1, \cdots, m - 1$ 为"小数".在"大数"中,n 应列于其他各数之前,由于共 $n - m$ 个"大数",故知与 $a_1 = m$ 相应的创新阶数为 2 的排列数目为

$$x_m = C_{n-1}^{n-m}(n-m-1)!(m-1)! = \frac{(n-1)!}{n-m}$$

因此,所求的算术平均值为

$$\frac{\sum_{m=1}^{n-1} m x_m}{\sum_{m=1}^{n-1} x_m} = \frac{(n-1)!\sum_{m=1}^{n-1}\frac{m}{n-m}}{(n-1)!\sum_{m=1}^{n-1}\frac{1}{n-m}} = \frac{\sum_{m=1}^{n-1}\frac{n-m}{m}}{\sum_{m=1}^{n-1}\frac{1}{m}} =$$

$$n - \frac{n-1}{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}}$$

5 若对正整数 n,存在 k,使得

$$n = n_1 n_2 \cdots n_k = 2^{2^{\frac{1}{k}(n_1-1)\cdots(n_k-1)}} - 1$$

其中 $n_1,\cdots,n_k$ 都是大于3的整数,则称 n 具有性质 P.求具有性质 P 的所有数 n.

解 由条件知,若 n 具有性质 P,则 $n = 2^m - 1$,其中 m 为正整数.

经验证知,对 $m = 1,2,\cdots,9$,只有当 $m = 3$ 时,$2^m - 1$ 具有性质 P,此时 $n = 7$.

下面证明,对 $m \geqslant 10$,$n = 2^m - 1$ 都不具有性质 P.用反证法.

假设存在某个 $m \geqslant 10$ 和正整数 k,使得 $n = 2^m - 1$ 可表示为

$$n = n_1 n_2 \cdots n_k = 2^{2^{\frac{1}{k}(n_1-1)\cdots(n_k-1)}} - 1 \qquad ①$$

则有

$$\frac{1}{2^k}(n_1-1)\cdots(n_k-1) \geqslant 10$$

由归纳法可证:当 $l \geqslant 10$ 时,$2^l - 1 > l^3$.所以

$$2^{2^{\frac{1}{k}(n_1-1)\cdots(n_k-1)}} - 1 > \left(\frac{1}{2^k}(n_1-1)\cdots(n_k-1)\right)^3$$

由于 $n = 2^m - 1$,故 n_i 均为奇数.又 $n_i > 3$,故 $n_i \geqslant 5(1 \leqslant i \leqslant k)$.这样

$$\left(\frac{n_i-1}{2}\right)^3 \geqslant 4 \cdot \frac{n_i-1}{2} > n_i, 1 \leqslant i \leqslant k$$

所以 $$2^{2^{\frac{1}{k}(n_1-1)\cdots(n_k-1)}} - 1 > \left(\frac{1}{2^k}(n_1-1)\cdots(n_k-1)\right)^3 > n_1 n_2 \cdots n_k$$

此与式 ① 矛盾.

所以具有性质 P 的数只有一个 $n = 7$.

6 某次考试有5道选择题,每题都有4个不同答案供选择,每人每题恰选1个答案.在2 000份答卷中发现存在一个 n,使得任何 n 份答卷中都存在4份,其中每两份的答案都至多3题相同.求 n 的最小可能值.

解 n 的最小可能值为25.

将每道题的4种答案分别记为1,2,3,4.每份试卷上的答案记为(g,h,i,j,k),其中 $g,h,i,j,k\in\{1,2,3,4\}$,令

$$\{(1,h,i,j,k),(2,h,i,j,k),(3,h,i,j,k),(4,h,i,j,k)\},$$
$$h,i,j,k=1,2,3,4$$

共得256个四元组.由于 $2\ 000=256\times7+208$,故由抽屉原理知有8份考卷上的答案属于同一个四元组.取出这8份考卷后,余下的1 992份中仍有8份属于同一个四元组;再取出这8份考卷,余下的1 984份中又有8份属于同一个四元组;取出这8份考卷,连同前两次取出的考卷共24份.在这24份考卷中,任何4份中总有两份的答案属于同一个四元组,当然不满足题中的要求.所以,所求的最小值大于等于25.

另一方面,令

$$S=\{(g,h,i,j,k)\mid g+h+i+j+k\equiv 0(\mathrm{mod}\ 4),g,h,i,j,k\in\{1,2,3,4\}\}$$

则 $|S|=256$,且 S 中任何两种答案都至多有3题相同.从 S 中去掉6个元素,当余下的250种答案中的每种答案都恰有8人选用时,共得到2 000份答卷,其中的任何25份答案中,总有4份不相同,由于它们都在 S 中,当然满足题中要求.这表明 $n=25$ 时可以满足题中要求.

综上可知,所求的 n 的最小可能值为25.

第16届中国数学奥林匹克

香港,2001

1 给定 $a,\sqrt{2}<a<2$. 内接于单位圆 Γ 的凸四边形 $ABCD$ 适合以下条件:

(1) 圆心在这凸四边形内部;

(2) 最大边长是 a,最小边长是 $\sqrt{4-a^2}$. 过点 A,B,C,D 依次作圆 Γ 的4条切线 L_A,L_B,L_C,L_D. 已知 L_A 与 L_B,L_B 与 L_C,L_C 与 L_D,L_D 与 L_A 分别交于点 A',B',C',D'. 求面积之比 $\frac{S_{四边形A'B'C'D'}}{S_{四边形ABCD}}$ 的最大值与最小值.

解 记圆 Γ 的圆心为 O,并记 $\angle AOB=2\theta_1$,$\angle BOC=2\theta_2$,$\angle COD=2\theta_3$,$\angle DOA=2\theta_4$. 于是 $\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4$ 都是锐角,且 $\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4=\pi$. 不难求得

$$S_{四边形A'B'C'D'}=\tan\theta_1+\tan\theta_2+\tan\theta_3+\tan\theta_4$$

$$S_{四边形ABCD}=\frac{1}{2}(\sin 2\theta_1+\sin 2\theta_2+\sin 2\theta_3+\sin 2\theta_4)$$

所以有

$$\frac{S_{四边形A'B'C'D'}}{S_{四边形ABCD}}=\frac{2(\tan\theta_1+\tan\theta_2+\tan\theta_3+\tan\theta_4)}{\sin 2\theta_1+\sin 2\theta_2+\sin 2\theta_3+\sin 2\theta_4} \qquad ①$$

由于式①右端关于 $\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4$ 对称,故不妨设 $AD=a$,$CD=\sqrt{4-a^2}$. 于是

$$\sin\theta_4=\frac{a}{2},\sin\theta_3=\frac{1}{2}\sqrt{4-a^2}$$

又因 $\cos(\theta_1+\theta_2)=\cos\theta_3\cos\theta_4-\sin\theta_3\sin\theta_4=$

$$\sqrt{1-(\frac{a}{2})^2}\sqrt{1-\frac{1}{4}(4-a^2)}-\frac{a}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{4-a^2}=0$$

所以 $\theta_3+\theta_4=\frac{\pi}{2}$. 从而,$\theta_1+\theta_2=\frac{\pi}{2}$.

由三角公式,有

$$\tan\theta_3+\tan\theta_4=\frac{\sin(\theta_3+\theta_4)}{\cos\theta_3\cos\theta_4}=\frac{1}{\sin\theta_4\sin\theta_3}=\frac{4}{a\sqrt{4-a^2}} \quad ②$$

$$\tan\theta_1+\tan\theta_2=\frac{\sin(\theta_1+\theta_2)}{\cos\theta_1\cos\theta_2}=\frac{1}{\cos\theta_1\cos\theta_2}=\frac{2}{\sin 2\theta_1} \quad ③$$

$$\sin 2\theta_3+\sin 2\theta_4=2\sin 2\theta_3=4\sin\theta_3\cos\theta_3=$$

$$4\sin\theta_3\sin\theta_4=a\sqrt{4-a^2} \quad ④$$

$$\sin 2\theta_1+\sin 2\theta_2=2\sin 2\theta_1 \quad ⑤$$

简记 $\alpha=\tan\theta_3+\tan\theta_4,\beta=\sin 2\theta_3+\sin 2\theta_4,t=\sin 2\theta_1$，于是 $\alpha\beta$ 为常数，而 t 为变数. 将 ② ~ ⑤ 代入 ①，得

$$\frac{S_{四边形A'B'C'D'}}{S_{四边形ABCD}}=\frac{2\alpha+\frac{4}{t}}{\beta+2t} \quad ⑥$$

容易看出，式⑥右端是 t 的严格递减函数，而 t 的最大值为 1，故得

$$\frac{S_{四边形A'B'C'D'}}{S_{四边形ABCD\min}}=\frac{4}{a\sqrt{4-a^2}}$$

另一方面，由于 $\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4$ 都是锐角，且 a 是最大边长，$\sqrt{4-a^2}$ 是最小边长，故有 $\theta_3\leqslant\theta_1,\theta_2<\theta_4$.

又因 $\theta_1+\theta_2=\frac{\pi}{2}=\theta_3+\theta_4$，故知 t 的最小值为

$$t_0=2\sin\theta_3\sin\theta_4=\frac{1}{2}a\sqrt{4-a^2}$$

于是，由式 ⑥ 右端函数的严格递减性，即得

$$\frac{S_{四边形A'B'C'D'}}{S_{四边形ABCD\max}}=\frac{8}{a^2(4-a^2)}$$

2 设 $X=\{1,2,\cdots,2\,001\}$. 求最小正整数 m，适合要求：对 X 的任何一个 m 元子集 W，都存在 $u,v\in W$（u 和 v 可以相同），使得 $u+v$ 是 2 的方幂.

解 将 X 分成以下 5 个子集进行考察：

$2\,001=1\,024+977\geqslant x\geqslant 1\,024-977=47$

$46=32+14\geqslant x\geqslant 32-14=18$

$17=16+1\geqslant x\geqslant 16-1=15$

$14=8+6\geqslant x\geqslant 8-6=2$

$x=1$

为了构造一个使题中要求不被满足且又含元素最多的例子，这个子集不能含 2 的任一方幂且每对数 $\{2^r+a,2^r-a\}$ 中只能有 1 个含在集中.

令 $Y=\{2\,001,2\,000,\cdots,1\,025\}\cup\{46,45,\cdots,33\}\cup\{17\}\cup\{14,13,\cdots,9\}\cup\{1\}$，则有 $|Y|=998$，且对任何 $u,v\in Y$，$u+v$ 都不是 2 的方幂.

事实上，当 $u,v\in Y$ 时，不妨设 $u\geqslant v$ 且有 $2^r<u\leqslant 2^r+a<2^{r+1}$，其中当 r 分别取值 10,5,4,3 时，相应的 a 值依次为 977，14，1，6.

i 若 $2^r<v\leqslant u$，则

$$2^{r+1}<u+v<2^{r+2}$$

$u+v$ 不能是 2 的方幂.

ii 若 $1\leqslant v<2^r$，则当 $2^r<u\leqslant 2^r+a,1\leqslant a<2^r$ 时，$1\leqslant v<2^r-a$. 于是

$$2^r<u+v<2^{r+1}$$

这表明 $u+v$ 也不能是 2 的方幂，所以子集 Y 中任何两数之和都不是 2 的方幂.

故知所求的最小正整数 $m\geqslant 999$.

将 X 划分成下列 999 个互不相交的子集

$$A_i=\{1\,024-i,1\,024+i\},i=1,2,\cdots,977$$

$$B_i=\{32-j,32+j\},j=1,2,\cdots,14$$

$$C=\{15,17\}$$

$$D_k=\{8-k,8+k\},k=1,2,\cdots,6$$

$$E=\{1,8,16,32,1\,024\}$$

对于 S 的任何一个 999 元子集 W. 若 $W\cap E\neq\varnothing$，则从其中任取一个元素的 2 倍都是 2 的方幂；若 $W\cap E=\varnothing$，则 W 中的 999 个元素分属于前面的 998 个 2 元子集. 由抽屉原理知 W 中必有不同的 u 和 v 属于其中同一子集. 显然，$u+v$ 为 2 的方幂.

综上可知，所求的最小正整数 $m=999$.

3 在正 n 边形的每个顶点上各停有 1 只喜鹊，偶受惊吓使得众喜鹊都飞去，一段时间后，它们又都回到这些点上，仍是每个顶点上 1 只，但未必都回到原来的顶点. 求所有正整数 n，使得一定存在 3 只喜鹊，以它们前后所在的顶点分别形成的三角形或同为锐角三角形，或同为直角三角形，或同为钝角三角形.

解法 1　当 $n=3,4$ 时，结论显然成立.

当 $n=5$ 时，连出 5 条对角线的正五边形中，恰有钝角三角形与锐角三角形各 5 个. 当 5 只喜鹊 A,B,C,D,E 飞落前后的状态如图 1 所示时，锐角三角形与钝角三角形互变，不满足题中要求.

故知 $n = 5$ 不行.

当 $n = 2m, m \geqslant 3, m \in \mathbf{N}$ 时,取正 n 边形的一对相对顶点 A 和 B 并考察从这两点飞起的两只喜鹊(仍称之为 A 和 B)的落点. 若喜鹊 A 和 B 的落点仍是一对相对顶点,则可任取另一只喜鹊 C,于是,A,B,C 三只喜鹊飞落前后所占据的顶点都构成直角三角形. 若喜鹊 A 和 B 的落点 A', B' 不是相对顶点,则可记 A' 的相对顶点为 C',并记返回后落在 C' 的喜鹊是从点 C 飞起的. 于是,A, B, C 三只喜鹊飞落前后所占据的顶点都构成直角三角形. 这就证明了所有不小于 4 的偶数 n 都满足要求.

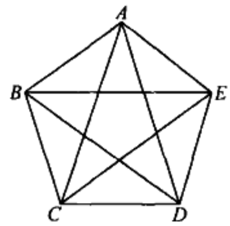


图 1

设 $n = 2m + 1, m \geqslant 3, m \in \mathbf{N}$. 这时图中没有直角三角形,让我们来证明如下引理.

引理 当 $n = 2m + 1, m \geqslant 3$ 时,连出所有对角线的正 n 边形中,钝角三角形的个数多于所有三角形个数的一半.

引理的证明 设正 n 边形为 $A_1A_2\cdots A_n$. 这时,以对角线 A_1A_{j+1} 为最长边的钝角三角形的个数为 $j - 1$. 所以钝角三角形的总数为

$$S = (2m + 1)(1 + 2 + \cdots + (m - 1)) = \frac{1}{2}(2m + 1)m(m - 1)$$

正 n 边形中三角形总数为

$$t = C_n^3 = \frac{1}{3}(2m + 1)m(2m - 1)$$

因为
$$m - 1 > \frac{1}{3}(2m - 1) \Leftrightarrow 3m - 3 > 2m - 1 \Leftrightarrow m > 3 - 1 = 2$$

后者显然成立,故知引理成立.

由引理可知,当 $n = 2m + 1, m \geqslant 3$ 时,总存在 3 只喜鹊,它们飞落前后所在的 3 个顶点都构成钝角三角形. 这表明不小于 7 的所有奇数都满足题中的要求.

综上可知,满足题中要求的所有自然数是

$$n \geqslant 3, n \neq 5$$

解法 2 前面证明均同解法 1,只是将 $n = 2m + 1, m \geqslant 3$ 的情形改证如下.

由于将正 n 边形连同顶点上落的喜鹊一起旋转时,三角形的形状不变,故可假设一只喜鹊 A 飞走后返回时仍然落在原处. 过 A 所在的顶点作正 n 边形的外接圆的一条直径 AA',于是,这条直径两侧各有 m 只喜鹊. 易见,位于直径同侧的任何两只喜鹊与 A 一起所在的 3 个顶点都构成钝角三角形. 由于 $m \geqslant 3$,所以位于直径同侧的 m 只喜鹊中,飞走返回时总有两只 B 和 C 仍在直径的同一侧,于是,A, B, C 这三只喜鹊飞落前后所在的 3 个顶点都构成钝角三角形. 这就证明了不小于 7 的所有奇数都满足题中的要求.

所以满足题中要求的所有自然数就是 $n \geqslant 3, n \neq 5$.

4 设 $a,b,c,a+b-c,a+c-b,b+c-a,a+b+c$ 是7个两两不同的质数，a,b,c 中有两数之和是800. 设 d 是这7个质数中最大数与最小数之差. 求 d 的最大可能值.

解 不妨设 $a<b<c$，于是，7个数中 $a+b-c$ 最小，而 $a+b+c$ 最大，从而有

$$d=(a+b+c)-(a+b-c)=2c$$

问题化为求 c 的最大可能值. 因为

$$a+b-c>0$$

所以

$$c<a+b<a+c<b+c$$

因为 $a+b,a+c,b+c$ 中1个数为800，所以

$$c<800$$

由于 $799=17\times 47$ 和 798 都不同质数，而 797 为质数，故有 $c\leqslant 797, d\geqslant 1\ 594$.

另一方面，当 $a+b=800$ 时，注意到

$$a=5,b=795$$

$$a=7,b=793=13\times 61$$

$$a=11,b=789=3\times 263$$

都不全是质数，从而不能满足题中要求.

而 $a=13,b=787$ 都是质数，这时 $a+b-c=3,a+c-b=23$ 也都是质数. 容易验证，$b+c-a=1\ 571$ 和 $a+b+c=1\ 597$ 也都是质数.

综上可知，d 的最大可能值为 1 594.

5 将周长为24的圆周等分成24段，从24个分点中选取8个点，使得其中任何两点间所夹的弧长都不等于 3 和 8. 问满足要求的 8 点组的不同取法共有多少种?说明理由.

解法 1 将 24 个分点依次编号 $1,2,\cdots,24$，并将它们按“坏的关系”排成如下的 3×8 数表

$$1,4,7,10,13,16,19,22,$$

$$9,12,15,18,21,24,3,6,$$

$$17,20,23,2,5,8,11,14$$

易见，表中每行中相邻两数所代表的两个分点间所夹的弧长为 3，每列相邻两数所代表的两个分点间所夹的弧长都是 8(首尾两数也算作相邻). 这样一来，题中对所取 8 点的要求化为要求所取 8 点的号码在数表中互不相邻. 所以每列恰取 1 个数，每行至多

4 个互不相邻的数.从而,3 行数中分别取数的个数只有 4 种不同情形

$$\{4,4,0\},\{4,3,1\},\{4,2,2\},\{3,3,2\}$$

(1) $\{4,4,0\}$.在 3 行中任取一行不取数,有 3 种不同取法.另两行中第一行取 4 个互不相邻的数,有两种不同取法.余下 4 列为另一行所取 4 个数所在的列,唯一确定.由乘法原理知,这种情形共有 6 种不同取法.

(2) $\{4,3,1\}$.在 3 行中取数的个数分别为 4,3,1,共有 $3! = 6$ 种不同安排.在一行中取 4 个互不相邻的数,有两种不同取法.在另一行和余下 4 列中选 1 个数,有 4 种不同选法.最后第 3 行从余下 3 列中各选 1 个数,选法唯一确定.由乘法原理知,这时共有 $6\times2\times4 = 48$ 种不同选法.

(3) $\{4,2,2\}$.从 3 行中选定一行取 4 个不相邻的数,选行有 3 种不同,取数有两种不同,共有 6 种不同取法.余下 4 列互不相邻.第 2 行从 4 列中任取 2 列,共有 $C_4^2 = 6$ 种不同取法.由乘法原理知,这种情形共有 $6\times6 = 36$ 种不同取法.

(4) $\{3,3,2\}$.从 3 行数中选定一行取 2 个不相邻的数,选行有 3 种不同,选数有 $C_7^2 - 1 = 20$ 种不同(其中减 1 是去掉两个数分别在第 1 列与第 8 列的 1 种).

选定两数之后,余下 6 列被分成两部分,有 3 种不同分段情形:$\{1,5\}$,$\{2,4\}$ 和 $\{3,3\}$.3 种分段的种数分别为 8,8,4.容易看出

i 对于 $\{1,5\}$ 分段,取 3 列互不相邻,有两种不同取法;

ii 对于 $\{2,4\}$ 分段,取 3 列互不相邻,有 4 种不同取法;

iii 对于 $\{3,3\}$ 分段,取 3 列互不相邻,有两种不同取法.

所以这种情形的不同取法种数为

$$3\times\{8\times2+8\times4+4\times2\} = 168$$

综上可知:满足题中要求的不同取法种数为

$$6+48+36+168 = 258$$

解法 2 同在解法 1 中一样,将 24 个数写成 3×8 数表,于是,选取 8 个数时每列恰取 1 个数,这时,从第 1 列取 1 个数,共有 3 种不同取法.第 1 列取定后,第 2 列所取的数不能与第 1 列所取的数同行,故只有两种不同取法.以后每列都有两种不同取法,共有 3×2^7 种不同取法.但其中第 1 列所取的数与第 8 列所取的数同行的所有取法都不满足要求.

若记从 $3\times n$ 数表中每列恰取一个数且任何相邻两列(包括第 n 列与第 1 列)所取的数都不同行的不同取法种数为 x_n,则上述的结论恰为

$$x_8 + x_7 = 3 \times 2^7$$

类似地可以得到

$$x_n + x_{n-1} = 3 \times 2^{n-1}$$

由此递推，即得

$$\begin{aligned} x_8 = 3 \times 2^7 - x_7 &= \\ 3 \times 2^7 - (3 \times 2^6 - x_6) &= \\ 3 \times (2^7 - 2^6) + x_6 = \cdots &= \\ 3 \times (2^7 - 2^6 + 2^5 - 2^4 + 2^3 - 2^2 + 2) &= \\ 3 \times 86 = 258 & \end{aligned}$$

即满足题中要求的不同取法种数为 258.

6 记 $a = 2\,001$，设 A 是适合下列条件的正整数对 (m, n) 所组成的集合：

(1) $m < 2a$;

(2) $2n \mid (2am - m^2 + n^2)$;

(3) $n^2 - m^2 + 2mn \leqslant 2a(n - m)$.

令 $f = \dfrac{2am - m^2 - mm}{n}$，求 $\min\limits_{(m,n)\in A} f$ 和 $\max\limits_{(m,n)\in A} f$.

解 (1) 先求 f 的最小值. 令

$$p = \frac{2am - m^2 + n^2}{2n} \qquad ①$$

由条件(1) 和(2) 可知，p 为正整数且有

$$(2a - m)m = (2p - n)n \qquad ②$$

由条件(1)，有 $2a - m > 0$，故由式 ② 可知

$$2p - n > 0$$

由条件(3)，可得

$$\begin{aligned} 2am - m^2 + n^2 = 2am - 2mn + 2mn - m^2 + n^2 &\leqslant \\ 2am - 2mn + 2a(n - m) &= \\ 2n(a - m) & \end{aligned}$$

从而由 p 的定义 ① 可得 $p \leqslant a - m$，于是有

$$2p - n < 2p \leqslant 2(a - m) = 2a - 2m < 2a - m$$

再由 ② 可知，m 与 n 同奇偶且有

$$n > m \qquad ③$$

设 $(m, n) \in A$，令

$$n' = 2p - n = \frac{2am - m^2}{n}$$

于是，n 也是正整数且容易验证

$$(m, n) \in A \Leftrightarrow (m, n') \in A$$

事实上,在 ① 中将 p 和 n 同时换成 p' 和 n',便有

$$p' = \frac{2am - m^2 + n'^2}{2n'} = \frac{2am - m^2}{2n'} + \frac{n'}{2} = \frac{n}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2am - m^2}{n} = \frac{2am - m^2 + n^2}{2n} = p$$

这表明 p 为正整数的充要条件是 p' 为正整数,亦即关于 (m,n') 的条件(2) 成立的充要条件是关于 (m,n) 的条件(2) 成立.

另一方面,对于 (m,n') 的条件(3),又有

$$n'^2 - m^2 + 2mn' - 2a(n' - m) =$$
$$\left(\frac{2am - m^2}{n}\right)^2 - m^2 + 2m\cdot\frac{2am - m^2}{n} - 2a\left(\frac{2am - m^2}{n} - m\right) =$$
$$\left(\frac{2am - m^2}{n}\right)^2 + (2am - m^2) + \frac{2(2am - m^2)}{n}(m - a) =$$
$$\frac{2am - m^2}{n^2}((2am - m^2) + n^2 + 2n(m - a))$$

再由条件(1) 便知,关于 (m,n') 的条件(3) 成立的充要条件是关于 (m,n) 的条件(3) 成立,这就证明了

$$(m,n') \in A \Leftrightarrow (m,n) \in A$$

这样一来,由此及 n' 的定义即知,当 $(m,n) \in A$ 时,有

$$f(m,n) = \frac{2am - m^2 - mn}{n} = n' - m$$
$$f(m,n') = \frac{2am - m^2 - mn'}{n'} = n - m$$

由 ③ 可知,当 $(m,n) \in A$ 时,有

$$f(m,n) = n' - m \geqslant 2 \qquad ④$$

取 $m = 2$,于是,条件(2) 化为

$$2n \mid 4a - 4 + n^2$$

即 $\frac{4\,000}{n} + \frac{n}{2}$ 为正整数.这是条件(3) 化为

$$n^2 - 3\,998n + 8\,000 \leqslant 0$$

由此解得

$$1\,999 - \sqrt{1\,999^2 - 8\,000} \leqslant n \leqslant 1\,999 + \sqrt{1\,999^2 - 8\,000}$$

从而有

$$3 \leqslant n \leqslant 3\,995$$

这表明 $(2,n) \in A$ 等价于 $n \in [3,3\,995]$ 且为 4 000 的偶因子.

取 $n = 2\,000$,于是

$$n' = \frac{2am - m^2}{n} = \frac{8\,000}{2\,000} = 4$$

故得 $f(2,2\,000) = 2$.

综上可知 $\min\limits_{(m,n)\in A} f = 2$.

(2) 再求 f 的最大值.

由(1)知,当 $(m,n)\in A$ 时,m 和 n 同奇偶且 $n>m$,故可令 $n=m+2u$,其中 u 为正整数,于是有

$$f(m,n)=\frac{2am-m^2-mn}{n}=$$
$$\frac{2(a-u)m-2m^2}{m+2u}=$$
$$\frac{2(a-u)(m+2u)-2(a-u)2u}{m+2u}-$$
$$\frac{2(m+2u)^2+8(m+2u)u-8u^2}{m+2u}=$$
$$(2a+6u)-2\left(m+2u+\frac{2u(a+u)}{m+2u}\right) \qquad ⑤$$

由条件(3)可知

$$(m+2u)^2-m^2+2m(m+2u)\leqslant 4ua$$

即

$$m^2+4um-2au+2u^2\leqslant 0$$

由此解得

$$m\leqslant -2u+\sqrt{2u(a+u)}$$

即

$$m+2u\leqslant\sqrt{2u(a+u)} \qquad ⑥$$

由⑥和⑤知,当 u 固定时,$f(m,m+2u)$ 关于 m 严格递增.

因为 $f(m,m+2u)$ 为正偶数,所以 $m+2u$ 必为 $2u(a+u)$ 的因数.

当 $u=1$ 时

$$2(a+1)=4\ 004=4\times 7\times 11\times 13$$

由式⑤右端方括号中表达式的对称性知,可设

$$m+2\leqslant[\sqrt{4\ 004}]=63$$

于是

$$m\in\{2,5,9,11,12,20,24,26,42,50\}$$

易得,当 $m=50,n=52$ 时,$(m,n)\in A$ 且有

$$f(50,52)=4\ 002+6-2\left[52+\frac{4\ 004}{52}\right]=3\ 750$$

由于 $f(m,m+2u)$ 关于 m 严格递增,所以有

$$f(m,m+2)\leqslant 3\ 750$$

以下证明,对任意 $(m,n)\in A$,都有

$$f(m,n)\leqslant 3\ 750 \qquad ⑦$$

上面已证,当 $n=m+2$ 时,式⑦成立.由于 m 和 n 同奇偶且 $n>m$,故可设 $n\geqslant m+4$,于是

$$f(m,n)=\frac{(2a-m)m}{n}-m\leqslant\frac{(2a-m)m}{m+4}-m$$

可见，为证式⑦成立，只须证明，对任意 $1 \leqslant m < 2a = 4\,002$，都有

$$\frac{(2a-m)m}{m+4} - m \leqslant 3\,750 \quad ⑧$$

整理后，得

$$m^2 - 124m + 2 \times 3\,750 \geqslant 0 \quad ⑧'$$

由于 $\Delta = 124^2 - 8 \times 3\,750 = 4(62^2 - 7\,500) < 0$

故知⑧′成立，从而⑧成立，⑦成立.

综上可知 $\max\limits_{(m,n)\in A} f(m,n) = 3\,750$.

第 17 届中国数学奥林匹克

上海,2002

1 $\triangle ABC$ 的三边长分别为 $a,b,c,b<c$,AD 是 $\angle A$ 的内角平分线,点 D 在 BC 上.

(1) 求在线段 AB,AC 内分别存在点 E,F(不是端点)满足 $BE=CF$ 和 $\angle BDE=\angle CDF$ 的充分必要条件(用 $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ 表示);

(2) 在点 E 和 F 存在情况下,用 a,b,c 表示 BE 的长.

解 (1) 如图 1,若在线段 AB,AC 内存在点 E,F,满足 $BE=CF$ 和 $\angle BDE=\angle CDF$,则因点 D 和 AB 和 AC 的距离相等,所以,有

$$S_{\triangle BDE}=S_{\triangle CDF}$$

从而,有

$$BD\cdot DE=DC\cdot DF \quad ①$$

由余弦定理,有

$$BD^2+DE^2-2BD\cdot DE\cos\angle BDE=BE^2=$$
$$CF^2=CD^2+DF^2-2CD\cdot DF\cos\angle CDF \quad ②$$

因 $\angle BDE=\angle CDF$,故由 ① 和 ②,可得

$$BD^2+DE^2=CD^2+DF^2 \quad ③$$
$$BD+DE=CD+DF \quad ④$$

由 ① 和 ④ 可知下列两种情形之一成立

$$\begin{cases}BD=CD\\DE=DF\end{cases} \quad ⑤$$

$$\begin{cases}BD=DF\\DE=CD\end{cases} \quad ⑥$$

因 $b<c$,故式 ⑤ 不可能成立.所以,式 ⑥ 成立.从而

$$\triangle DEB\cong\triangle DCF$$

进而有 $$\angle B=\angle DFC,\angle C=\angle BED$$

所以 $$\angle B=\angle DFC>\angle DAF=\frac{1}{2}\angle A$$

即 $$2\angle B>\angle A$$

这是点 E 和 F 存在的必要条件.

反之,若 $2\angle B>\angle A$,则

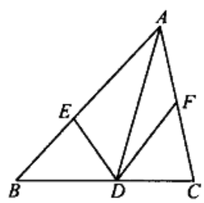


图 1

$$\angle ADC = \angle B + \frac{1}{2}\angle A > \angle A$$

$$\angle ADB = \angle C + \frac{1}{2}\angle A > \angle A$$

于是,可在 $\triangle ABC$ 内部作 $\angle BDE = \angle A, \angle CDF = \angle A$,且使点 E 在 AB 内,点 F 在 AC 内.这导致 A,C,D,E 和 A,B,D,F 都四点共圆.所以

$$\angle B = \angle DFC$$

从而

$$\triangle BDE \backsim \triangle FDC$$

又因这两个三角形过点 D 的高相等,所以 $\triangle BDE \cong \triangle FDC$.故

$$BE = CF$$

综上可知,所求的充分必要条件是 $2\angle B > \angle A$.

(2) 由(1)中论述知 A,C,D,E 和 A,B,D,F 都四点共圆.所以

$$BE \cdot BA = BD \cdot BC, CF \cdot CA = CD \cdot CB$$

又因 $BE = CF$,所以

$$BE(AB + AC) = BC(BD + DC) = BC^2$$

$$BE = \frac{a^2}{b + c}$$

2 设多项式充列 $\{p_n(x)\}$ 满足:

$$P_1(x) = x^2 - 1, P_2(x) = 2x(x^2 - 1)$$

且

$$P_{n+1}(x)P_{n-1}(x) = (P_n(x))^2 - (x^2 - 1)^2, n = 2,3,\cdots \quad ①$$

设 S_n 为 $P_n(x)$ 各项系数的绝对值之和,对于任意正整数 n,求非负整数 k_n,使得 $2^{-k_n}S_n$ 为奇数.

解 由式①,有

$$P_{n+1}(x)P_{n-1}(x) - P_n^2(x) =$$

$$P_n(x)P_{n-2}(x) - P_{n-1}^2(x), n = 3,4,\cdots$$

$$P_{n-1}(x)(P_{n+1}(x) + P_{n-1}(x)) = P_n(x)(P_n(x) + P_{n-2}(x))$$

由此递推可得

$$\frac{P_{n+1}(x) + P_{n-1}(x)}{P_n(x)} = \frac{P_n(x) + P_{n-2}(x)}{P_{n-1}(x)} = \cdots =$$

$$\frac{P_3(x) + P_1(x)}{P_2(x)} \quad ②$$

因为

$$P_1(x) = x^2 - 1, P_2(x) = 2x(x^2 - 1)$$

$$P_3(x) = \frac{P_2^2(x) - (x^2 - 1)^2}{P_1(x)} = (x^2 - 1)(4x^2 - 1)$$

所以

$$\frac{P_3(x)+P_1(x)}{P_2(x)}=\frac{(x^2-1)(4x^2-1)+(x^2-1)}{2x(x^2-1)}=2x \quad ③$$

将式③代入式②,得到

$$P_{n+1}(x)=2xP_n(x)-P_{n-1}(x),n=2,3,\cdots \quad ④$$

补充定义 $P_0(x)=0$.

于是,式④对 $n=1$ 也成立,式④对应的特征方程为

$$\lambda^2-2x\lambda+1=0$$

其根为 $\lambda=x\pm\sqrt{x^2-1}(|x|>1)$,易得

$$P_n(x)=\frac{1}{2}\sqrt{x^2-1}((x+\sqrt{x^2-1})^n-(x-\sqrt{x^2-1})^2)$$

其中 $n=0,1,2,\cdots$

由二项式定理,可得

$$P_n(x)=\sum_{m=0}^{\sigma_n}C_n^{2m+1}x^{n-2m-1}(x^2-1)^{m+1}$$

其中
$$\sigma_n=\begin{cases}[\frac{n}{2}],n\text{ 为奇数}\\ \frac{n}{2}-1,n\text{ 为偶数}\end{cases}$$

则
$$P_n(x)=(x^2-1)\sum_{m=0}^{\sigma_n}C_n^{2m+1}x^{n-2m-1}\sum_{l=0}^{m}(-1)^lC_m^lx^{2m-2l}=$$
$$(x^2-1)\sum_{l=0}^{\sigma_n}(-1)^lx^{n-2l-1}\sum_{m=1}^{\sigma_n}C_n^{2m+1}C_m^l \quad ⑤$$

记 $a_l=\sum\limits_{m=l}^{\sigma_n}C_n^{2m+1}C_m^l$,代入式⑤得

$$P_n(x)=(a_0x^{n+1}-a_1x^{n-1}+a_2x^{n-3}-\cdots+(-1)^{\sigma_n}a_{\sigma_n}x^{n-2\sigma_n+1})-$$
$$(a_0x^{n-1}-a_1x^{n-3}+\cdots+(-1)^{\sigma_n-1}a_{\sigma_n-1}x^{n-2\sigma_n}+1$$
$$(-1)\sigma_na_{\sigma_n}x^{n-2\sigma_n-1})$$

由此可得

$$S_n=a_0+(a_1+a_0)+\cdots+(a_{\sigma_n}+a_{\sigma_{n-1}})+a_{\sigma_n}=$$
$$2(a_0+a_1+\cdots+a_{\sigma_n})=2\sum_{l=0}^{\sigma_n}\sum_{m=l}^{\sigma_n}C_n^{2m+1}C_m^l=$$
$$2\sum_{m=0}^{\sigma_n}C_n^{2m+1}\sum_{l=0}^{\sigma_m}C_m^l=2\sum_{m=0}^{\sigma_n}C_n^{2m+1}2^m$$

故

$$S_n=\frac{1}{\sqrt{2}}[(1+\sqrt{2})^n-(1-\sqrt{2})^n],n=0,1,2\cdots \quad ⑥$$

令 $t_n=(1+\sqrt{2})^n+(1-\sqrt{2})^n,n=0,1,2,\cdots$,则 S_n,t_n 都是

非负整数, $S_0 = 0, S_1 = 2, t_0 = t_1 = 2$, 且

$$t_n + \sqrt{2}S_n = 2(1+\sqrt{2})^n, n = 0,1,2,\cdots \quad ⑦$$

当 $n \geqslant 2$ 时

$$t_n = 2\sum_{0\leqslant 2m\leqslant n} C_n^{2m}2^n = 2(1 + \sum_{0<2m\leqslant n} C_n^{2m}2^m)$$

可见,当 $n = 0,1,2,\cdots$ 时, $\frac{1}{2}t_n$ 为奇数.

设 n, m 为非负整数,由式⑦,得

$$t_{n+m} + \sqrt{2}S_{n+m} = 2(1+\sqrt{2})^{n+m} = \frac{1}{2}(t_n + \sqrt{2}S_n)(t_m + \sqrt{2}S_m) = \frac{1}{2}t_nt_m + S_nS_m + \frac{\sqrt{2}}{2}(t_nS_m + t_mS_n)$$

从而,有

$$t_{n+m} = \frac{1}{2}t_nt_m + S_nS_m, S_{n+m} = \frac{1}{2}(t_nS_m + t_mS_n) \quad ⑧$$

令 $n = m$,得到

$$S_{2n} = \left(\frac{1}{2}t_n\right)2S_n, n = 0,1,2,\cdots$$

由于 $S_1 = 2$,而 $\frac{1}{2}t_n$ 为奇数,故由数学归纳法知 $2^{-(m+1)}S_{2^m}$ 为奇数,且 $m = 0,1,2,\cdots$,即

$$k_{2^m} = m + 1 \quad ⑨$$

再由式⑧可知, $k_n = k_m$,则

$$k_{n+m} = \min\{k_n, k_m\} \quad ⑩$$

对于任意正整数 n,设

$$n = 2^{m_0} + 2^{m_1} + \cdots + 2^{m_l}$$

其中 $m_0, m_1, \cdots, m_l$ 均为整数,且 $0 \leqslant m_0 < m_1 < \cdots < m_l$.

由式⑨和式⑩可得, $k_n = m_0 + 1$.

3 18 支足球队进行单循环赛,即每轮将 18 支球队分成 9 组,每组的两队赛一场,下一轮重新分组进行比赛,共赛 17 轮,使得每队都与另外 17 支队各赛一场.按任意可行的程序比赛了 n 轮之后,总存在 4 支球队,它们之间总共只赛了 1 场.求 n 的最大可能值.

解 考察如下的比赛程序:

1.(1,2)(3,4)(5,6)(7,8)(9,18)(10,11)(12,13)(14,15)(16,17)
2.(1,3)(2,4)(5,7)(6,9)(8,17)(10,12)(11,13)(14,16)(15,18)
3.(1,4)(2,5)(3,6)(8,9)(7,16)(10,13)(11,14)(12,15)(17,18)

4. (1,5)(2,7)(3,8)(4,9)(6,15)(10,14)(11,16)(12,17)(13,18)
5. (1,6)(2,8)(3,9)(4,7)(5,14)(10,15)(11,17)(12,18)(13,16)
6. (1,7)(2,9)(3,5)(6,8)(4,13)(10,16)(11,18)(12,14)(15,17)
7. (1,8)(2,6)(4,5)(7,9)(3,12)(10,17)(11,15)(13,14)(16,18)
8. (1,9)(3,7)(4,6)(5,8)(2,11)(10,18)(12,16)(13,15)(14,17)
9. (2,3)(4,8)(5,9)(6,7)(1,10)(11,12)(13,17)(14,18)(15,16)
10. (1,11)(2,12)(3,13)(4,14)(5,15)(6,16)(7,17)(8,18)(9,10)
11. (1,12)(2,13)(3,14)(4,15)(5,1s)(s,17)(7,18)(8,10)(9,11)
12. (1,13)(2,14)(3,15)(4,16)(5,17)(s,18)(7,10)(8,11)(9,12)
……
17. (1,18)(2,10)(3,11)(4,12)(5,13)(6,14)(7,15)(8,16)(9,17)

将前 9 队称为 A 组，后 9 队称为 B 组. 易见 9 轮之后，凡同组两队均已赛过. 所以任何 4 队之间至少已赛过两场，当然不满足题中要求.

如果把上述程序颠倒过来，然后按新序进行比赛，则 8 轮过后，同组任何两队均未赛过，每个队都是与另一组中 9 支队中的 8 支队各赛 1 场. 这时同组 4 支队之间一场未赛，而不全同组的 4 队之间至少已赛了两场，当然都不能满足题中要求.

以上所述表明，所求 n 的最大可能值不大于 7.

设已进行了 7 轮比赛且任何 4 队都不满足题中要求.

选取已赛过一场的两队 A_1 和 A_2，于是，每队都和另外 6 队比赛过，两个队至多与另外 12 支队赛过. 从而，至少有 4 队 B_1,B_2,B_3,B_4 与 A_1,A_2 均未赛过. 由反证假设知，B_1,B_2,B_3 和 B_4 两两均已赛过.

B_1 和 B_2 两队在 $\{B_1,B_2,B_3,B_4\}$ 4 队之间各赛了 3 场. 从而，每队都与另 14 支队中的 4 队各赛 1 场. 这又导致至少有 6 队 $C_1,C_2,\cdots,C_6$ 与 B_1,B_2 均未赛过. 由反证假设知 $C_1,C_2,\cdots,C_6$ 两两均已赛过.

C_1 和 C_2 两队在 $\{C_1,C_2,\cdots,C_6\}$ 中各赛了 5 场. 从而，每队都与另外 12 支队中的 2 队各赛 1 场，所以至少有 8 队 $D_1,D_2,\cdots,D_8$ 与 C_1,C_2 均未赛过. 由反证假设又知这 8 支队之间两两均已赛过. 这样一来，D_1,D_2 与另外 10 支队均未赛过. 由于只赛了 7 轮，另外 10 支队中必有两队 E_1 和 E_2 尚未赛过. 于是，$\{D_1,D_2,E_1,E_2\}$ 之间总共进行了 1 场比赛，此与反证假设矛盾.

综上可知，最多能进行 7 轮比赛.

4 对于平面上任意 4 个不同的点 P_1, P_2, P_3, P_4,求比值

$$\frac{\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 4} P_iP_j}{\min\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 4} P_iP_j} \qquad ①$$

的最小值.

解 先证如下的引理.

引理:如图 1,在 $\triangle ABC$ 中,若 $AB \geqslant m, AC \geqslant m, \angle BAC = \alpha$,则 $BC \geqslant 2m\sin\frac{\alpha}{2}$.

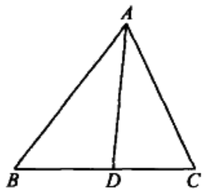


图 1

引理的证明:$\angle A$ 的平分线 AD,由正弦定理,有

$$BC = BD + DC = AB\frac{\sin\angle BAD}{\sin\angle ADB} + AC\frac{\sin\angle CAD}{\sin\angle ADC} =$$

$$\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\angle ADB}(AB + AC) \geqslant 2m\sin\frac{\alpha}{2}$$

回到原题的解.

记 $m = \sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 4} P_iP_j, k = \sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 4} P_iP_j$,分类估计式 ① 的值.

(1) 若 P_1, P_2, P_3, P_4 中有 3 点共线,不妨设前 3 点共线,于是,有

$$P_1P_2 + P_2P_3 + P_1P_3 \geqslant 4m$$

从而

$$k \geqslant 7m$$

故

$$\frac{k}{m} \geqslant 7$$

(2) 若 4 点的凸包是三角形,不妨设点 P_4 在 $\triangle P_1P_2P_3$ 内部,且 $\angle P_1P_4P_2 \geqslant 120°$.由引理知

$$P_1P_2 \geqslant 2m\sin\frac{\angle P_1P_4P_2}{2} \geqslant 2m\sin 60° = \sqrt{3}m$$

从而

$$\frac{k}{m} \geqslant 5 + \sqrt{3} \qquad ②$$

(3) 凸包是四边形 $P_1P_2P_3P_4$.若凸四边形 $P_1P_2P_3P_4$ 有一个内角不小于 $120°$,不妨设为 $\angle P_2P_1P_4$,由引理有 $P_2P_4 \geqslant \sqrt{3}m$.从而式 ② 成立.

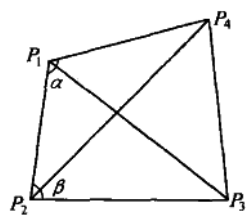


图 2

设凸四边形 $P_1P_2P_3P_4$ 的 4 个内角都小于 $120°$,如图 2 所示.于是,总有两个相邻内角之和不小于 $180°$.不妨设 $\alpha + \beta = \angle P_4P_1P_2 + \angle P_1P_2P_3 \geqslant 180°$,且 $\alpha \geqslant \beta$.由于 $\alpha < 120°$,故 $\beta > 60°$.所以

$$\frac{\alpha+\beta}{4} \geqslant 45^\circ, 0^\circ \leqslant \frac{\alpha-\beta}{4} < 15^\circ$$

由引理,有

$$P_2P_4 \geqslant 2m\sin\frac{\alpha}{2}, P_1P_3 \geqslant 2m\sin\frac{\beta}{2}$$

则
$$\begin{aligned} P_1P_3 + P_2P_4 \geqslant 2m\left(\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2}\right) = \\ 4m\sin\frac{\alpha+\beta}{4}\cos\frac{\alpha-\beta}{4} \geqslant \\ 4m\sin 45^\circ\cos 15^\circ = \\ 2m(\sin 60^\circ + \sin 30^\circ) = \\ (\sqrt{3}+1)m \end{aligned}$$

所以式 ② 成立.

综上可知,在所有情况下,式 ② 均成立.

另一方面,当 P_1, P_2, P_3, P_4 是有一个内角为 60° 的菱形的 4 个顶点时,式 ② 中等号成立.

所以所求的$\frac{k}{m}$ 的最小值为 $5+\sqrt{3}$.

5 平面上横纵坐标都为有理数的点称为有理点.

求证:平面上的全体有理点可分成 3 个两两不交的集合,满足条件:

(1) 在以每个有理点为圆心的任一圆内一定包含 3 个点分属于这 3 个集合;

(2) 在任何一条直线上都不可能有 3 个点分别属于这 3 个集合.

解 显然,任一有理点均可唯一地写成$\left(\frac{u}{w}, \frac{v}{w}\right)$的形成,其中 u, v, w 都是整数,$w > 0$,且$(u, v, w) = 1$.令

$$A = \left\{\left(\frac{u}{w}, \frac{v}{w}\right) \middle| 2 \nmid u\right\}, B = \left\{\left(\frac{u}{w}, \frac{v}{w}\right) \middle| 2 \mid u, 2 \nmid v\right\}$$

$$C = \left\{\left(\frac{u}{w}, \frac{v}{w}\right) \middle| 2 \mid u, 2 \mid v\right\}$$

让我们来验证 3 个集合满足条件(1) 和(2).

设平面上的直线方程为

$$ax + by + c = 0$$

如果其上有两个不同的有理点(x_1, y_1) 和(x_2, y_2),则有

$$\begin{cases} ax_1 + by_1 + c = 0 \\ ax_2 + by_2 + c = 0 \end{cases}$$

如果 $c=0$,则可取 a,b 为有理数.如果 $c\neq 0$,不妨设 $c=1$,于是,从上面的联立方程中可解得 a 和 b 的值,当然都是有理数.再通分即知可以使 a,b,c 都是整数且满足 $(a,b,c)=1$.

设有理点 $\left(\frac{u}{w},\frac{v}{w}\right)$ 在直线 $ax+by+c=0$ 上,于是,有

$$L: au+bv+cw=0 \quad ①$$

(1) 先证集 A,B,C 满足条件(2).分以下三种情形

i $2\nmid c$.若 $2\mid u,2\mid v$,则由 ① 和 $2\mid cw$,从而 $2\mid w$,此与 $(u,v,w)=1$ 矛盾.所以集合 C 中的点都不能在直线 L 上.

ii $2\mid c,2\nmid b$.若 $2\nmid v$,则 $2\nmid au$.从而 $2\nmid u$.因此,集合 B 中的点不能在直线 L 上.

iii $2\mid c,2\mid b$.由 ① 得 $2\mid au$.又因 $(a,b,c)=1$,故 $2\nmid a$.所以 $2\mid u$.这表明集合 A 中的点都不在直线 L 上.

综上可知,A,B,C 这3个集合满足条件(2).

(2) 再证集合 A,B,C 满足条件(1).

设 D 是以有理点 $\left(\frac{u_0}{w_0},\frac{v_0}{w_0}\right)$ 为圆心,以 r 为半径的圆.取正整数 k,使得

$$2^k>\max\left\{w_0,\frac{1}{r}(|u_0|+|v_0|+1)\right\}$$

于是易验证,下列3个有理点

$$\left(\frac{u_02^k+1}{w_02^k},\frac{v_02^k}{w_02^k}\right)\in A,\left(\frac{u_02^k}{w_02^k},\frac{v_02^k+1}{w_02^k}\right)\in B$$

$$\left(\frac{u_02^k}{w_0(2^k+1)},\frac{v_02^k}{w_0(2^k+1)}\right)\in C$$

都在圆 D 的内部.注意,在上述3点中,u,v,w 不一定互质.但由于 $2^k>w_0$,故约分之后不改变分子的奇偶性.这表明条件(1)成立.

6 给定 $c\in\left(\frac{1}{2},1\right)$.求最小常数 M,使对任意整数 $n\geqslant 2$ 及实数 $0<a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n$,只要满足

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}ka_k=c\sum_{k=1}^{n}a_k \quad ①$$

总有

$$\sum_{k=1}^{n}a_k\leqslant M\sum_{k=1}^{m}a_k$$

其中 $m=[cn]$ 表示不超过 cn 的最大整数.

解 令 $r=cn,s_0=0,s_k=\sum\limits_{i=1}^{k}a_i,k=1,2,\cdots,n$，于是由式①，有

$$0=\sum_{k=1}^{n}(k-r)a_k=\sum_{k=1}^{n}(k-r)s_k-\sum_{k=1}^{n}(k-r)s_{k-1}=\sum_{k=1}^{n}(k-r)s_k-\sum_{k=1}^{n-1}(k+1-r)s_k=(n-r)s_n-\sum_{k=1}^{n-1}s_k=(n+1-r)s_n-\sum_{k=1}^{n}s_k$$

即

$$\sum_{k=1}^{n}s_k=(n+1-r)s_n \qquad ②$$

对于 $1\leqslant j\leqslant k\leqslant n$，有

$$js_k-ks_j=j\sum_{l=j+1}^{k}a_l-(k-j)\sum_{l=1}^{j}a_l\geqslant j(k-j)a_j-j(k-j)a_j=0$$

故
$$s_j\leqslant\frac{j}{k}\cdot s_k$$

由此可得

$$\sum_{j=1}^{k-1}s_j\leqslant\frac{s_k}{k}\sum_{j=1}^{k-1}j=\frac{k-1}{2}\cdot s_k \qquad ③$$

下面我们来证明

$$\sum_{k=m}^{n}s_k\leqslant\frac{n+1-m}{2}(s_m+s_n) \qquad ④$$

对于 $k=0,1,\cdots,n-m$，有

$$(n-m-k)(s_{m+k}-s_m)\leqslant k(n-m-k)a_{m+k}\leqslant k(s_n-s_{m+k})$$

由此可得
$$s_{m+k}\leqslant\frac{1}{n-m}((n-m-k)s_m+ks_n)$$

对 k 求和得到

$$\sum_{k=m}^{n}s_k=\sum_{k=0}^{n-m}s_{m+k}\leqslant\frac{1}{n-m}\left(s_m\sum_{k=0}^{n-m}(n-m-k)+s_n\sum_{k=0}^{n-m}k\right)=\frac{n+1-m}{2}(s_m+s_n)$$

式④得证.

在式③中令 $k=m$，得到

$$\sum_{j=1}^{m-1}s_j\leqslant\frac{m-1}{2}\cdot s_m \qquad ⑤$$

将式②④和⑤结合起来，得到

$$(n+1-r)s_n\leqslant\frac{n}{2}\cdot s_m+\frac{n+1-m}{2}\cdot s_n$$

$$s_n \leqslant \frac{n}{n+1+m-2r} \cdot s_m \leqslant \frac{n}{n-r} \cdot s_m = \frac{1}{1-c} \cdot s_m$$

可见
$$M \leqslant \frac{1}{1-c}$$

显然,只须再证 $M \geqslant \frac{1}{1-c}$.

对于 $n \geqslant \frac{1}{2c-1}$,令

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_m = 1, a_{m+1} = a_{m+2} = \cdots = a_n = \frac{2cnm - m(m+1)}{(n-m)(n+m+1) - 2cn(n-m)}$$

于是,$a_{m+1} \geqslant 1$ 且满足

$$\sum_{k=1}^{n} ka_k = \sum_{k=1}^{m} k + a_{m+1} \sum_{k=m+1}^{n} k = cn \cdot \frac{mn}{n+m+1-2cn} = cn \sum_{k=1}^{n} a_k$$

即满足条件①.

注意到 $cn - 1 < m \leqslant cn$,有

$$M \geqslant \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k}{\sum_{k=1}^{m} a_k} = \frac{n}{n+m+1-2cn} \geqslant \frac{n}{n-cn+1} = \frac{1}{1-c+\frac{1}{n}} = \frac{1}{1-c} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{n(1-c)}} \geqslant \frac{1}{1-c}\left(1 - \frac{1}{n(1-c)}\right) = \frac{1}{1-c} - \frac{1}{n(1-c)^2}, \forall n \gg 1$$

由此可得 $M \geqslant \frac{1}{1-c}$.

第18届中国数学奥林匹克

长沙,2003

1 设点 I,H 分别为锐角 $\triangle ABC$ 的内心和垂心,点 B_1,C_1 分别为边 AC,AB 的中点.已知射线 B_1I 交边 AB 于点 $B_2(B_2\neq B)$,射线 C_1I 交 AC 的延长线于点 C_2,B_2C_2 与 BC 相交于 K,A_1 为 $\triangle BHC$ 的外心.试证:A,I,A_1 三点共线的充分必要条件是 $\triangle BKB_2$ 和 $\triangle CKC_2$ 的面积相等.

证明 首先,证明 A,I,A_1 三点共线 $\Leftrightarrow\angle BAC=60°$.

如图1,设 O 为 $\triangle ABC$ 的外心,联结 BO,CO,则

$$\angle BHC=180°-\angle BAC$$

$$\angle BA_1C=2(180°-\angle BHC)=2\angle BAC$$

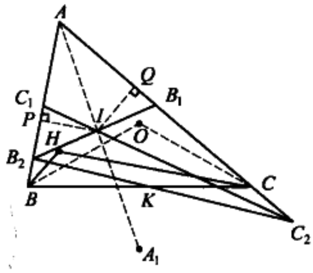


图1

因此

$\angle BAC=60°\Leftrightarrow\angle BAC+\angle BA_1C=180°\Leftrightarrow$

A_1 在 $\triangle ABC$ 的外接圆圆 O 上 $\Leftrightarrow$

AI 与 AA_1 重合(因为 A_1 在 BC 中垂线上)$\Leftrightarrow$

A,I,A_1 三点共线

其次,再证

$$S_{\triangle BKB_2}=S_{\triangle CKC_2}\Leftrightarrow\angle BAC=60°$$

作 $IP\perp AB$ 于点 P,$IQ\perp AC$ 于点 Q,则

$$S_{\triangle AB_1B_2}=\frac{1}{2}IP\cdot AB_2+\frac{1}{2}IQ\cdot AB_1$$

又注意到 $$S_{\triangle AB_1B_2}=\frac{1}{2}AB_1\cdot AB_2\cdot\sin A$$

所以 $$IP\cdot AB_2+IQ\cdot AB_1=AB_1\cdot AB_2\cdot\sin A$$

设 $IP=r$(r 为 $\triangle ABC$ 的内切圆半径),则 $IQ=r$.又令 $BC=a,CA=b,AB=c$,则 $r=\dfrac{2S_{\triangle ABC}}{a+b+c}$.

又由 $AB_1=\dfrac{b}{2}$,$2AB_1\sin A=h_c=\dfrac{2S_{\triangle ABC}}{c}$,有

$$AB_2\left(\frac{2S_{\triangle ABC}}{c}-2\cdot\frac{2S_{\triangle ABC}}{a+b+c}\right)=b\cdot\frac{2S_{\triangle ABC}}{a+b+c}$$

则 $$AB_2=\frac{bc}{a+b-c}$$

同理 $$AC_2=\frac{bc}{a+c-b}$$

因此 $$S_{\triangle BKB_2}=S_{\triangle CKC_2}\Leftrightarrow S_{\triangle ABC}=S_{\triangle AB_2C_2}\Leftrightarrow$$
$$bc=\frac{bc}{a+b-c}\cdot\frac{bc}{a+c-b}\Leftrightarrow$$
$$a^2=b^2+c^2-bc\Leftrightarrow$$
$$\angle BAC=60°\text{(由余弦定理)}$$

所以命题成立.

2 求出同时满足如下条件的集合 S 的元素个数的最大值:

(1) S 中的每个元素都是不超过 100 的正整数;

(2) 对于 S 中任意两个不同的元素 a,b,都存在 S 中的元素 c,使得 a 与 c 的最大公约数等于 1,并且 b 与 c 的最大公约数也等于 1;

(3) 对于 S 中任意两个不同的元素 a,b,都存在 S 中异于 a,b 的元素 d,使得 a 与 d 的最大公约数大于 1,并且 b 与 d 的最大公约数也大于 1.

解 最大个数为 72.

将不超过 100 的每个正整数 n 表示成
$$n=2^{\alpha_1}\cdot3^{\alpha_2}\cdot5^{\alpha_3}\cdot7^{\alpha_4}\cdot11^{\alpha_5}\cdot q$$
其中 q 是不能被 2,3,5,7,11 整除的正整数,$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 为非负整数.

我们选取满足条件"$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 中恰有 1 个或 2 个非零"的那些正整数组成集合 S,即 S 中包括 50 个偶数 2,4,…,98,100. 但除去 $2\times3\times5,2^2\times3\times5,2\times3^2\times5,2\times3\times7,2^2\times3\times7,2\times5\times7,2\times3\times11$ 这 7 个数;3 的奇数倍 $3\times1,3\times3,\cdots,3\times33$ 共 17 个数;最小素因子为 5 的数 $5\times1,5\times5,5\times7,5\times11,5\times13,5\times17,5\times19$ 共 7 个数;最小素因子为 7 的数 $7\times1,7\times7,7\times11,7\times13$ 共 4 个数;以及素数 11. 从而,S 中总共有 $(50-7)+17+7+4+1=72$ 个数.

下面证明如此构造的 S 满足题述条件.

条件(1) 显然满足.

对于条件(2),注意到在 $[a,b]$ 的素因子中至多出现 2,3,5,7,11 中的 4 个数,记某个未出现的数为 p,显然 $p\in S$,并且
$$(p,a)\leqslant(p,[a,b])=1$$
$$(p,b)\leqslant(p,[a,b])=1$$
于是,取 $c=p$ 即可.

对于条件(3),当 $(a,b)=1$ 时,取 a 的最小素因子 p 和 b 的最

小素因子 q,易见 $p\neq q$,并且 $p,q\in\{2,3,5,7,11\}$.于是,$pq\in S$,并且

$$(pq,a)\geqslant p>1,(pq,b)\geqslant q>1$$

a,b 互质保证了 pq 异于 a,b.从而,取 $d=pq$ 即可.

当 $(a,b)=e>1$ 时,取 p 为 e 的最小素因子,q 为满足 $q\nmid[a,b]$ 的最小素数,易见 $p\neq q$,并且 $p,q\in\{2,3,5,7,11\}$.于是,$pq\in S$,并且

$$(pq,a)\geqslant(p,a)=p>1$$
$$(pq,b)\geqslant(p,b)=p>1$$

$q\nmid[a,b]$ 保证了 pq 异于 a,b.从而,取 $d=pq$ 即可.

下面证明任意满足题述条件的集合 S 的元素数目不会超过 72.

显然,$1\notin S$.对于任意两个大于 10 的质数 p,q,因为与 p,q 均不互质的数最小是 pq,已大于 100,故据条件(3)知,10 与 100 之间的 21 个质数 11,13,…,89,97 中最多有一个出现在 S 中.记除 1 和这 21 个质数外的其余 78 个不超过 100 的自然数构成集合 T,我们断言 T 中至少有 7 个数不在 S 中,从而 S 中最多有 $78-7+1=72$ 个元素.

(1) 当有某个大于 10 的质数 p 属于 S 时,S 中所有各数最小素因子只可能是 2,3,5,7 和 p.运用条件(2)可得出以下结论:

i 若 $7p\in S$,因 $2\times3\times5,2^2\times3\times5,2\times3^2\times5$ 与 $7p$ 包括了所有的最小素因子,故由条件(2)知,$2\times3\times5,2^2\times3\times5,2\times3^2\times5\notin S$;若 $7p\notin S$,注意 $2\times7p>100$,而 $p\in S$,故由条件(3)知 $7\times1,7\times7,7\times11,7\times13\notin S$.

ii 若 $5p\in S$,则 $2\times3\times7,2^2\times3\times7\notin S$;若 $5p\notin S$,则 $5\times1,5\times5\notin S$.

iii $2\times5\times7$ 与 $3p$ 不同属于 S.

iv $2\times3p$ 与 5×7 不同属于 S.

v 若 $5p,7p\notin S$,则 $5\times7\notin S$.

当 $p=11$ 或 13 时,由 i,ii,iii,iv 可分别得出至少有 3,2,1,1 个 T 中的数不属于 S,合计 7 个;当 $p=17$ 或 19 时,由 i,ii,iii 可分别得出至少有 4,2,1 个 T 中的数不属于 S,合计 7 个;当 $p>20$ 时,由 i,ii,iii 分别有至少 4,2,1 个 T 中的数不属于 S,合计 7 个;当 $p>20$ 时,由 i,ii,iii 分别有至少 4,2,1 个 T 中的数不属于 S,合计也是 7 个.

(2) 如果没有大于 10 的质数属于 S,则 S 中的最小素因子只可能是 2,3,5,7.于是,下面 7 对数中的每对都不能同时在 S 中出现:$(3,2\times5\times7)$,$(5,2\times3\times7)$,$(7,2\times3\times5)$,$(2\times3,5\times7)$,

$(2\times 5,3\times 7),(2\times 7,3\times 5),(2^2\times 7,3^2\times 5)$.

从而，T 中至少有 7 个数不在 S 中.

综上所述，本题的答案为 72.

3 给定正整数 n，求最小的正数 λ，使得对于任何 $\theta_i \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)(i=1,2,\cdots,n)$，只要 $\tan\theta_1\cdot\tan\theta_2\cdot\cdots\cdot\tan\theta_n=2^{\frac{n}{2}}$，就有 $\cos\theta_1+\cos\theta_2+\cdots+\cos\theta_n$ 不大于 λ.

解 当 $n=1$ 时

$$\cos\theta_1=(1+\tan^2\theta_1)^{-\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

有 $\lambda=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

当 $n=2$ 时，可以证明

$$\cos\theta_1+\cos\theta_2\leqslant\frac{2\sqrt{3}}{3} \quad ①$$

且当 $\theta_1=\theta_2=\arctan\sqrt{2}$ 时等号成立. 事实上

$$式①\Leftrightarrow\cos^2\theta_1+\cos^2\theta_2+2\cos\theta_1\cos\theta_2\leqslant\frac{4}{3}$$

即

$$\frac{1}{1+\tan^2\theta_1}+\frac{1}{1+\tan^2\theta_2}+2\sqrt{\frac{1}{(1+\tan^2\theta_1)(1+\tan^2\theta_2)}}\leqslant\frac{4}{3} \quad ②$$

由 $\tan\theta_1\tan\theta_2=2$ 可得

$$式②\Leftrightarrow\frac{2+\tan^2\theta_1+\tan^2\theta_2}{5+\tan^2\theta_1+\tan^2\theta_2}+2\sqrt{\frac{1}{5+\tan^2\theta_1+\tan^2\theta_2}}\leqslant\frac{4}{3} \quad ③$$

记 $x=\tan^2\theta_1+\tan^2\theta_2$，则

$$式③\Leftrightarrow 2\sqrt{\frac{1}{5+x}}\leqslant\frac{14+x}{3(5+x)}$$

即

$$36(5+x)\leqslant 196+28x+x^2 \quad ④$$

显然 $$式④\Leftrightarrow x^2-8x+16=(x-4)^2\geqslant 0$$

于是，$\lambda=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

当 $n\geqslant 3$ 时，不妨设 $\theta_1\geqslant\theta_2\geqslant\cdots\geqslant\theta_n$，则

$$\tan\theta_1\tan\theta_2\tan\theta_3\geqslant 2\sqrt{2}$$

由于 $$\cos\theta_i=\sqrt{1-\sin^2\theta_i}<1-\frac{1}{2}\sin^2\theta_i$$

则 $$\cos\theta_2+\cos\theta_3<2-\frac{1}{2}(\sin^2\theta_2+\sin^2\theta_3)<$$

$$2-\sin\theta_2\sin\theta_3$$

由
$$\tan^2\theta_1\geqslant\frac{8}{\tan^2\theta_2\tan^2\theta_3}$$

有
$$\frac{1}{\cos^2\theta_1}\geqslant\frac{8+\tan^2\theta_2\tan^2\theta_3}{\tan^2\theta_2\tan^2\theta_3}$$

即
$$\cos\theta_1\leqslant\frac{\tan\theta_2\tan\theta_3}{\sqrt{8+\tan^2\theta_2\tan^2\theta_3}}=\frac{\sin\theta_2\sin\theta_3}{\sqrt{8\cos^2\theta_2\cos^2\theta_3+\sin^2\theta_2\sin^2\theta_3}}$$

于是
$$\cos\theta_2+\cos\theta_3+\cos\theta_1<2-\sin\theta_2\sin\theta_3\left(1-\frac{1}{\sqrt{8\cos^2\theta_2\cos^2\theta_3+\sin^2\theta_2\sin^2\theta_3}}\right)\quad ⑤$$

注意到
$$8\cos^2\theta_2\cos^2\theta_3+\sin^2\theta_2\sin^2\theta_3\geqslant 1\Leftrightarrow 8+\tan^2\theta_2\tan^2\theta_3\geqslant\frac{1}{\cos^2\theta_2\cos^2\theta_3}=(1+\tan^2\theta_2)(1+\tan^2\theta_3)\Leftrightarrow$$
$$\tan^2\theta_2+\tan^2\theta_3\leqslant 7\quad ⑥$$

由此可得当式 ⑥ 成立时,有
$$\cos\theta_1+\cos\theta_2+\cos\theta_3<2\quad ⑦$$

若式 ⑥ 不成立,则
$$\tan^2\theta_2+\tan^2\theta_3>7$$

因此
$$\tan^2\theta_1\geqslant\tan^2\theta_2>\frac{7}{2}$$

所以
$$\cos\theta_1\leqslant\cos\theta_2<\sqrt{\frac{1}{1+\frac{7}{2}}}=\frac{\sqrt{2}}{3}$$

于是
$$\cos\theta_1+\cos\theta_2+\cos\theta_3<\frac{2\sqrt{2}}{3}+1<2$$

即式 ⑦ 亦成立.

由此可得
$$\cos\theta_1+\cos\theta_2+\cos\theta_3+\cdots+\cos\theta_n<n-1$$

另一方面,取 $\theta_2=\theta_3=\cdots=\theta_n=\alpha>0,\alpha\to 0$,则
$$\theta_1=\arctan\frac{2^{\frac{n}{2}}}{(\tan\alpha)^{n-1}}$$

显然 $\theta_1\to\frac{\pi}{2}$,从而
$$\cos\theta_1+\cos\theta_2+\cos\theta_3+\cdots+\cos\theta_n\to n-1$$

综上可得 $\lambda=n-1$.

❹ 求所有满足 $a \geqslant 2, m \geqslant 2$ 的三元正整数组 (a, m, n)，使得 $a^n + 203$ 是 $a^m + 1$ 的倍数.

解 对于 n, m 分三种情况讨论.

i $n < m$ 时，由 $a^n + 203 \geqslant a^m + 1$，有

$$202 \geqslant a^m - a^n \geqslant a^n(a-1) \geqslant a(a-1)$$

所以

$$2 \leqslant a \leqslant 14$$

当 $a = 2$ 时，n 可取 $1, 2, \cdots, 7$；

当 $a = 3$ 时，n 可取 $1, 2, 3, 4$；

当 $a = 4$ 时，n 可取 $1, 2, 3$；

当 $5 \leqslant a \leqslant 6$ 时，n 可取 $1, 2$；

当 $7 \leqslant a \leqslant 14$ 时，$n = 1$.

由 $a^m + 1 \mid a^n + 203$ 可知，解为 $(2,2,1), (2,3,2)$ 和 $(5,2,1)$.

ii $n = m$ 时，$a^m + 1 \mid 202$. 由于 202 仅有 1, 2, 101, 202 共 4 个约数. 而 $a \geqslant 2, m \geqslant 2, a^m + 1 \geqslant 5$，故 $a^m = 100$ 或 201. 又 $m \geqslant 2$，所以解为 $(10, 2, 2)$.

iii $n > m$ 时，由 $a^m + 1 \mid 203(a^m + 1)$，有

$$a^m + 1 \mid a^n + 203 - (203a^m + 203)$$

即

$$a^m + 1 \mid a^m(a^{n-m} - 203)$$

又

$$(a^m + 1, a^m) = 1$$

所以

$$a^m + 1 \mid a^{n-m} - 203$$

a. 若 $a^{n-m} < 203$，则令 $n - m = s \geqslant 1$，有 $a^m + 1 \mid 203 - a^s$. 所以

$$203 - a^s \geqslant a^m + 1$$

$$202 \geqslant a^s + a^m \geqslant a^m + a = a(a^{m-1} + 1) \geqslant a(a+1), 2 \leqslant a \leqslant 13$$

类似于 i 的讨论，可知 (a, m, s) 的解为

$(2,2,3), (2,6,3), (2,4,4), (2,3,5), (2,2,7), (3,2,1), (4,2,2), (5,2,3), (8,2,1)$

于是，(a, m, n) 为

$(2,2,5), (2,6,9), (2,4,8), (2,3,8), (2,2,9), (3,2,3), (4,2,4), (5,2,5), (8,2,3)$

b. $a^{n-m} = 203$ 时，则 $a = 203, n - m = 1$，即解为

$$(203, m, m+1), m \geqslant 2$$

c. $a^{n-m} > 203$ 时，令 $n - m = s \geqslant 1$，则

$$a^m + 1 \mid a^s - 203$$

又 $a^s - 203 \geqslant a^m + 1$，则 $s > m$，由

$$a^m+1 \mid a^s+203a^m=(a^{s-m}+203)a^m=(a^{n-2m}+203)a^m$$

$$(a^m+1,a^m)=1$$

所以
$$a^m+1 \mid a^{n-2m}+203$$

又 $s>m \Leftrightarrow n-m>m \Leftrightarrow n>2m \Leftrightarrow n-2m>0$.此时的解只能由前面的解派生出来,即由 $(a,m,n) \to (a,m,n+2m) \to \cdots \to (a,m,n+2km)$,且每一个派生出的解都满足 $a^m+1 \mid a^n+203$.

综上所述,所有解 (a,m,n) 为

$$(2,2,4k+1),(2,3,6k+2),(2,4,8k+8),$$
$$(2,6,12k+9),(3,2,4k+3),(4,2,4k+4),$$
$$(5,2,4k+1),(8,2,4k+3),(10,2,4k+2),$$
$$(203,m,(2k+1)m+1)$$

其中,k 为任意非负整数,且 $m \geqslant 2$ 为整数.

5 某公司需要录用一名秘书,共有 10 人报名,公司经理决定按照求职报名的顺序逐个面试,前 3 个人面试后一定不录用.自第 4 个人开始将他与前面面试过的人相比较,如果他的能力超过了前面所有已面试过的人,就录用他,否则就不录用,继续面试下一个.如果前 9 个人都不录用,那么就录用最后一个面试的人.

假定这 10 个人的能力各不相同,可以按能力由强到弱排为第 1,第 2,…,第 10.显然该公司到底录用哪一个人,与这 10 个人报名的顺序有关.大家知道,这样的排列共有 10! 种.我们以 A_k 表示能力第 k 的人能够被录用的不同报名顺序的数目,以 $\frac{A_k}{10!}$ 表示他被录用的可能性.

证明:在该公司经理的方针之下,有

(1) $A_1>A_2>\cdots>A_8=A_9=A_{10}$;

(2) 该公司有超过 70% 的可能性录取到能力最强的 3 个人之一,而只有不超过 10% 的可能性录用到能力最弱的 3 个人之一.

证明 将前 3 个面试者中能力最强的排名名次记为 a.显然 $a \leqslant 8$.将此时能力排名第 k 的人被选上的排列集合记作 $A_k(a)$,相应的排列数目记作 $|A_k(a)|$.

(1) 易知,当 $a=1$ 时,必然放过前面9个人,录用最后一个面试的人,此时除能力第一的人之外,其余各人机会均等,不难算得

$$|A_k(1)|=3\times 8! \triangleq r_1, k=2,3,\cdots,10$$

其中,"$\triangleq$"表示"记为".

当 $2 \leqslant a \leqslant 8$ 时，对于 $a \leqslant k \leqslant 10$，能力排名第 k 的人无录用机会. 对于 $1 \leqslant k < a$，此时机会均等. 事实上，此时能力排名第 a 的人排在前三个，有 3 种选择位置的办法. 而能力排名第 1 至第 $a-1$ 的人都排在后 7 个位置上，并且谁位于他们之首就是谁被录用，有排法 $C_7^{a-1}(a-2)!$ 种；其余 $10-a$ 个人可以在剩下的位置上任意排列，有 $(10-a)!$ 种排法. 故有

$$|A_k(a)| = \begin{cases} 3C_7^{a-1}(a-2)!(10-a)! \triangleq r_a, k = 1,\cdots,a-1 \\ 0, k = a,\cdots,10 \end{cases}$$

上述结果表明

$$A_8 = A_9 = A_{10} = r_1 = 3 \times 8! > 0 \quad ①$$

$$A_k = r_1 + \sum_{a=k+1}^{8} r_a, k = 2,\cdots,7 \quad ②$$

$$A_1 = \sum_{a=2}^{8} r_a \quad ③$$

由式 ① 和 ② 知

$$A_2 > A_3 > \cdots > A_8 = A_9 = A_{10} > 0$$

而由式 ② 和 ③ 知

$$A_1 - A_2 = r_2 - r_1 = 3 \times 7 \times 8! - 3 \times 8! > 0$$

综合上述，问题(1) 获证.

(2) 由式 ① 知

$$\frac{A_8 + A_9 + A_{10}}{10!} = \frac{3 \times r_1}{10!} = \frac{3 \times 3 \times 8!}{10!} = 10\%$$

所以，录用到能力最弱的三人之一的可能性等于 10%.

由式 ② 和 ③ 可知

$$A_1 = \sum_{a=2}^{8} r_a = \sum_{a=2}^{8} 3C_7^{a-1}(a-2)!(10-a)! =$$

$$3 \times 7! \sum_{a=2}^{8} \frac{(9-a)(10-a)}{a-1} =$$

$$3 \times 7! \sum_{s=1}^{7} \frac{(8-s)(9-s)}{s} =$$

$$3 \times 7! \times \left(56 + 21 + 10 + 5 + \frac{12}{5} + 1 + \frac{2}{7}\right) =$$

$$3 \times 7! \times 95\frac{24}{35} > 3 \times 7! \times 95\frac{2}{3} =$$

$$287 \times 7!$$

$$A_2 = r_1 + \sum_{a=3}^{8} r_a =$$

$$3 \times 8! + 3 \times 7! \times \left(21 + 10 + 5 + \frac{12}{5} + 1 + \frac{2}{7}\right) =$$

$$3 \times 7! \times 47\frac{24}{35} > 3 \times 7! \times 47\frac{2}{3} = 143 \times 7!$$

$$A_3 = r_1 + \sum_{a=4}^{8} r_a =$$
$$3 \times 8! + 3 \times 7! \times \left(10 + 5 + \frac{12}{5} + 1 + \frac{2}{7}\right) =$$
$$3 \times 7! \times 26\frac{24}{35} > 3 \times 7! \times 26\frac{2}{3} = 80 \times 7!$$

所以

$$\frac{A_1 + A_2 + A_3}{10!} > \frac{287 + 143 + 80}{720} = \frac{510}{720} = \frac{17}{24} > 70\%$$

即录用到能力最强三人之一的可能性大于 70%.

6 设 a,b,c,d 为正实数,满足 $ab + cd = 1$,点 $P_i(x_i, y_i)$ $(i = 1,2,3,4)$ 是以原点为圆心的单位圆周上的四个点.求证:

$$(ay_1 + by_2 + cy_3 + dy_4)^2 + (ax_4 + bx_3 + cx_2 + dx_1)^2 \leqslant 2\left(\frac{a^2 + b^2}{ab} + \frac{c^2 + d^2}{cd}\right)$$

证法 1 令 $u = ay_1 + by_2, v = cy_3 + dy_4, u_1 = ax_4 + bx_3, v_1 = cx_2 + dx_1$,则

$$u^2 \leqslant (ay_1 + by_2)^2 + (ax_1 - bx_2)^2 = a^2 + b^2 + 2ab(y_1y_2 - x_1x_2)$$

即

$$x_1x_2 - y_1y_2 \leqslant \frac{a^2 + b^2 - u^2}{2ab} \quad ①$$

$$v_1^2 \leqslant (cx_2 + dx_1)^2 + (cy_2 - dy_1)^2 = c^2 + d^2 + 2cd(x_1x_2 - y_1y_2)^2$$

即

$$y_1y_2 - x_1x_2 \leqslant \frac{c^2 + d^2 - v_1^2}{2cd} \quad ②$$

① + ② 得 $$0 \leqslant \frac{a^2 + b^2 - u^2}{2ab} + \frac{c^2 + d^2 - v_1^2}{2cd}$$

即 $$\frac{u^2}{ab} + \frac{v_1^2}{cd} \leqslant \frac{a^2 + b^2}{ab} + \frac{c^2 + d^2}{cd}$$

同理 $$\frac{v^2}{cd} + \frac{u_1^2}{ab} \leqslant \frac{c^2 + d^2}{cd} + \frac{a^2 + b^2}{ab}$$

由柯西不等式,有

$$(u + v)^2 + (u_1 + v_1)^2 \leqslant$$
$$(ab + cd)\left(\frac{u^2}{ab} + \frac{v^2}{cd}\right) + (ab + cd)\left(\frac{u_1^2}{ab} + \frac{v_1^2}{cd}\right) =$$
$$\frac{u^2}{ab} + \frac{v^2}{cd} + \frac{u_1^2}{ab} + \frac{v_1^2}{cd} \leqslant 2\left(\frac{a^2 + b^2}{ab} + \frac{c^2 + d^2}{cd}\right)$$

证法 2 由柯西不等式可知

$$(ay_1+by_2+cy_3+dy_4)^2\leqslant$$

$$(ab+cd)\left(\frac{(ay_1+by_2)^2}{ab}+\frac{(cy_3+dy_4)^2}{cd}\right)=$$

$$\frac{a}{b}y_1^2+\frac{b}{a}y_2^2+\frac{c}{d}y_3^2+\frac{d}{c}y_4^2+2(y_1y_2+y_3y_4)$$

同理 $(ax_4+bx_3+cx_2+dx_1)^2\leqslant$

$$\frac{a}{b}x_4^2+\frac{b}{a}x_3^2+\frac{c}{d}x_2^2+\frac{d}{c}x_1^2+2(x_1x_2+x_3x_4)$$

所以,原不等式中

$$\begin{aligned}\text{左式}-\text{右式}\leqslant{}&\frac{a}{b}y_1^2+\frac{b}{a}y_2^2+\frac{c}{d}y_3^2+\frac{d}{c}y_4^2+2y_1y_2+2y_3y_4+\\&\frac{a}{b}x_4^2+\frac{b}{a}x_3^2+\frac{c}{d}x_2^2+\frac{d}{c}x_1^2+2x_1x_2+2x_3x_4-\\&2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{c}{d}+\frac{d}{c}\right)=\\&-\frac{a}{b}x_1^2-\frac{b}{a}x_2^2-\frac{c}{d}x_3^2-\frac{d}{c}x_4^2-\frac{a}{b}y_4^2-\frac{b}{a}y_3^2-\\&\frac{c}{d}y_2^2-\frac{d}{c}y_1^2+2(x_1x_2+x_3x_4+y_1y_2+y_3y_4)\leqslant\\&-2x_1x_2-2x_3x_4-2y_3y_4-2y_1y_2+2(x_1x_2+\\&x_3x_4+y_1y_2+y_3y_4)=0\end{aligned}$$

命题获证.

第19届中国数学奥林匹克

澳门,2004

1 凸四边形 $EFGH$ 的顶点 E,F,G,H 分别在凸四边形 $ABCD$ 的边 AB,BC,CD,DA 上,满足

$$\frac{AE}{EB}\cdot\frac{BF}{FC}\cdot\frac{CG}{GD}\cdot\frac{DH}{HA}=1$$

而点 A,B,C,D 分别在凸四边形 $E_1F_1G_1H_1$ 的边 $H_1E_1,E_1F_1,F_1G_1,G_1H_1$ 上,满足 $E_1F_1\parallel EF,F_1G_1\parallel FG,G_1H_1\parallel GH,H_1E_1\parallel HE$.已知 $\frac{E_1A}{AH_1}=\lambda$,求 $\frac{F_1C}{CG_1}$ 的值.

解 (1)若 $EF\parallel AC$,如图1所示,则

$$\frac{BE}{EA}=\frac{BF}{FC}$$

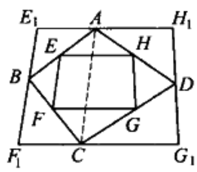


图1

代入已知条件,可以得到 $\frac{DH}{HA}=\frac{DG}{GC}$,所以 $HG\parallel AC$,从而 $E_1F_1\parallel AC\parallel H_1G_1$,故

$$\frac{F_1C}{CG_1}=\frac{E_1A}{AH_1}=\lambda$$

(2)若 EF 与 AC 不平行,如图2所示,设 FE 的延长线与 CA 的延长线相交于点 T,则由梅涅劳斯定理得

$$\frac{CF}{FB}\cdot\frac{BE}{EA}\cdot\frac{AT}{TC}=1$$

结合题设有
$$\frac{CG}{GD}\cdot\frac{DH}{HA}\cdot\frac{AT}{TC}=1$$

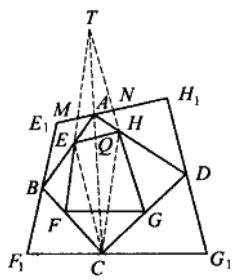


图2

由梅涅劳斯定理的逆定理知 T,H,G 三点共线,设 TF,TG 与 E_1H_1 分别交于点 M,N.

由 $E_1B\parallel EF$,得 $E_1A=\frac{BA}{EA}\cdot AM$,同理 $H_1A=\frac{AD}{AH}\cdot AN$,所以

$$\frac{E_1A}{H_1A}=\frac{AM}{AN}\cdot\frac{AB}{AE}\cdot\frac{AH}{AD}\qquad ①$$

又
$$\frac{EQ}{QH}=\frac{\triangle AEC}{\triangle AHC}=\frac{\triangle ABC\cdot AE\cdot AD}{\triangle ADC\cdot AB\cdot AH}\qquad ②$$

由 ①② 得 $\frac{E_1A}{AH_1}=\frac{EQ}{QH}\cdot\frac{AB}{AE}\cdot\frac{AH}{AD}=\frac{\triangle ABC}{\triangle ADC}$

同理可得 $\frac{F_1C}{CG_1}=\frac{\triangle ABC}{\triangle ADC}$

所以 $\frac{F_1C}{CG_1}=\frac{E_1A}{AH_1}=\lambda$

2 已知正整数 c，设数列 $x_1,x_2,\cdots$ 满足 $x_1=c$ 且

$$x_n=x_{n-1}+\left[\frac{2x_{n-1}-(n+2)}{n}\right]+1,n=2,3,\cdots$$

其中$[x]$表示不大于 x 的最大整数，求数列$\{x_n\}$的通项公式.

解 显然当 $n\geqslant 2$ 时

$$x_n=x_{n-1}+\left[\frac{2(x_{n-1}-1)}{n}\right]$$

令 $a_n=x_n-1$，则

$$a_1=c-1$$

$$a_n=a_{n-1}+\left[\frac{2a_{n-1}}{n}\right]=\left[\frac{n+2}{n}a_{n-1}\right],n=2,3,\cdots \qquad ①$$

设 $u_n=A\frac{(n+1)(n+2)}{2},n=1,2,\cdots$，其中 A 为非负整数.由于当 $n\geqslant 2$ 时，有

$$\left[\frac{n+2}{n}u_{n-1}\right]=\left[A\frac{(n+2)}{2n}n(n+1)\right]=A\frac{(n+1)(n+2)}{2}=u_n$$

所以数列$\{u_n\}$满足 ①.

设 $y_n=n,n=1,2,\cdots$，则当 $n\geqslant 2$ 时

$$\left[\frac{n+2}{n}y_{n-1}\right]=\left[\frac{(n+2)(n-1)}{n}\right]=\left[n+1-\frac{2}{n}\right]=n=y_n$$

从而$\{y_n\}$也满足 ①.

设 $z_n=\left[\frac{(n+2)^2}{4}\right],n=1,2,\cdots$.当 $n=2m$ 且 $m\geqslant 1$ 时

$$\left[\frac{n+2}{n}z_{n-1}\right]=\left[\frac{m+1}{m}\left[\frac{(2m+1)^2}{4}\right]\right]=\left[\frac{m+1}{m}m(m+1)\right]=(m+1)^2=z_n$$

当 $n=2m+1(m\geqslant 1)$ 时

$$\left[\frac{n+2}{n}z_{n-1}\right]=\left[\frac{2m+3}{2m+1}\left[\frac{(2m+2)^2}{4}\right]\right]=$$

$$\left[\frac{2m+3}{2m+1}(m+1)^2\right]=$$

$$\left[(m+1)(m+2)+\frac{m+1}{2m+1}\right]=$$

$$(m+1)(m+2)=\left[\frac{(2m+3)^2}{4}\right]=z_n$$

从而 $\{z_n\}$ 也满足 ①.

对任意非负整数 A,令

$$v_n=u_n+y_n=A\cdot\frac{(n+1)(n+2)}{2}+n$$

$$w_n=u_n+z_n=A\cdot\frac{(n+1)(n+2)}{2}+\left[\frac{(n+2)^2}{4}\right],n=1,2,\cdots$$

显然 $\{v_n\}$ 和 $\{w_n\}$ 都满足 ①.

由于 $u_1=3A,y_1=1,z_1=\left[\frac{9}{4}\right]=2$,所以当 $3\mid a_1$ 时

$$a_n=\frac{a_1}{6}(n+1)(n+2)$$

当 $a_1\equiv1(\bmod 3)$ 时

$$a_n=\frac{a_1-1}{6}(n+1)(n+2)+n$$

当 $a_1\equiv2(\bmod 3)$ 时

$$a_n=\frac{a_1-2}{6}(n+1)(n+2)+\left[\frac{(n+2)^2}{4}\right]$$

综上可得

$$x_n=\frac{c-1}{6}(n+1)(n+2)+1,c\equiv1(\bmod 3)$$

$$x_n=\frac{c-2}{6}(n+1)(n+2)+n+1,c\equiv2(\bmod 3)$$

$$x_n=\frac{c-3}{6}(n+1)(n+2)+\left[\frac{(n+2)^2}{4}\right]+1,c\equiv0(\bmod 3)$$

3 设 M 是平面上 n 个点组成的集合,满足:

(1) M 中存在 7 个点是一个凸七边形的 7 个顶点;

(2) 对 M 中任意 5 个点,若这 5 个点是一个凸五边形的 5 个顶点,则此凸五边形内部至少含有 M 中的一个点.

求 n 的最小值.

解 先证 $n\geqslant11$.

设顶点在 M 中的一个凸七边形为 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$,联结 A_1A_5,由条件(1)知,在凸五边形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 中至少有 M 中一个点,记为 P_1,联结 P_1A_1,P_1A_5,则在凸五边形 $A_1P_1A_5A_6A_7$ 内至少有 M 中一个点,记为 P_2,且 P_2 异于 P_1. 联结直线 P_1P_2. 则 A_1,

$A_2,\cdots,A_7$ 中至少有5个顶点不在直线 P_1P_2 上，由抽屉原理知，在直线 P_1P_2 的某一侧必有3个顶点，这3个顶点与点 P_1,P_2 构成的凸五边形内，至少含有 M 中的一个点 P_3.

再作直线 P_1P_3,P_2P_3，令直线 P_1P_2 对应区域 π_3：它是以直线 P_1P_2 为边界且在 $\triangle P_1P_2P_3$ 异侧的一个半平面(不含直线 P_1P_2)，类似地定义区域 π_1,π_2. 这样，3个区域 π_1,π_2,π_3 覆盖了平面上除 $\triangle P_1P_2P_3$ 外的所有点，由抽屉原理，7个顶点 $A_1,A_2,\cdots,A_7$ 中必有 $\left[\frac{7}{3}\right]+1=3$ 个顶点在同一区域(不妨设为 π_3)中，这3点与 P_1，P_2 构成一个顶点在 M 中的凸五边形，故其内部至少含 M 中一个点 P_4，所以 $n\geqslant 11$.

下面我们构造一个例子说明 $n=11$ 是可以的. 如图1所示，凸七边形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ 为一整点七边形，其内部有4个点，则条件(1)显然满足. 这个点集 M 也满足条件(2). 证明如下，用反证法，假设存在一个整点凸五边形，其内部不含整点. 则因整点多边形的面积均可表示为 $\frac{n}{2}(n\in\mathbf{N}_+)$ 的形式，由最小数原理，必有一个面积最小的内部不含整点的整点凸五边形 $ABCDE$. 考虑顶点坐标的奇偶性，只有4种情况：(奇，偶)，(偶，奇)，(奇，奇)，(偶，偶). 从而五边形 $ABCDE$ 的顶点中必有两个顶点的坐标的奇偶性完全相同，于是它们连线的中点 P 仍为整点. 又 P 不在凸五边形 $ABCDE$ 内部，从而 P 在凸五边形的某条边上，不妨设 P 在边 AB 上，则 P 为 AB 的中点，联结 PE，则 $PBCDE$ 是面积更小的内部不含整点的整点凸五边形，矛盾.

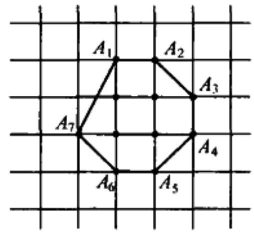


图1

综上所述，n 的最小值为11.

4 给定实数 a 和正整数 n，求证：

(1) 存在唯一的实数数列 $x_0,x_1,\cdots,x_n,x_{n+1}$，满足

$$\begin{cases}x_0=x_{n+1}=0\\ \frac{1}{2}(x_{i+1}+x_{i-1})=x_i+x_i^3-a^3,i=1,2,\cdots,n\end{cases}$$

(2)(1) 中的数列 $x_0,x_1,\cdots,x_n,x_{n+1}$ 满足

$$|x_i|\leqslant|a|,i=0,1,\cdots,n+1$$

解 (1) 存在性：由 $x_{i+1}=2x_i+2x_i^3-2a^3-x_{i-1},i=1,2,\cdots,n$，及 $x_0=0$ 知每一 x_i 是 x_1 的 3^{i-1} 次实系数多项式，从而 x_{n+1} 为 x_1 的 3^n 次实系数多项式. 由于 3^n 为奇数，故存在实数 x_1，使得 $x_{n+1}=0$. 由此 x_1 及 $x_0=0$ 可计算出 x_i，如此得到的数列 $x_0,x_1,\cdots,x_{n+1}$ 满足所给条件.

唯一性：设 $w_0, w_1, \cdots, w_{n+1}$ 及 $v_0, v_1, v_2, \cdots, v_{n+1}$ 为满足条件的两个数列，则

$$\frac{1}{2}(w_{i+1}+w_{i-1}) = w_i + w_i^3 - a^3$$

$$\frac{1}{2}(v_{i+1}+v_{i-1}) = v_i + v_i^3 - a^3$$

因此

$$\frac{1}{2}(w_{i+1}-v_{i+1}+w_{i-1}-v_{i-1}) = (w_i - v_i)(1+w_i^2+w_iv_i+v_i^2)$$

设 $|w_{i_0}-v_{i_0}|$ 最大，则

$$\begin{aligned}|w_{i_0}-v_{i_0}| \leqslant |w_{i_0}-v_{i_0}|(1+w_{i_0}^2+w_{i_0}v_{i_0}+v_{i_0}^2) \leqslant \\ \frac{1}{2}|w_{i_0+1}-v_{i_0+1}|+\frac{1}{2}|w_{i_0-1}-v_{i_0-1}| \leqslant \\ |w_{i_0}-v_{i_0}|\end{aligned}$$

从而 $$|w_{i_0}-v_{i_0}| = 0$$

或 $$1+w_{i_0}^2+w_{i_0}v_{i_0}+v_{j_0}^2 = 1$$

即 $$|w_{i_0}-v_{i_0}| = 0$$

或 $$w_{i_0}^2+v_{i_0}^2+(w_{i_0}+v_{i_0})^2 = 0$$

所以 $|w_{i_0}-v_{i_0}|=0$ 总成立，从而由 $|w_{i_0}-v_{i_0}|$ 的最大性知所有 $|w_i-v_i|=0$，即 $w_i=v_i, i=1,2,\cdots,n$. 唯一性得证.

(2) 设 $|x_{i_0}|$ 最大，则

$$\begin{aligned}|x_{i_0}|+|x_{i_0}|^3 = |x_{i_0}|(1+x_{i_0}^2)| = \left|\frac{1}{2}(x_{i_0+1}+x_{i_0-1})+a^3\right| \leqslant \\ \frac{1}{2}|x_{i_0+1}|+\frac{1}{2}|x_{i_0-1}|+|a|^3 \leqslant \\ |x_{i_0}|+|a|^3\end{aligned}$$

因此 $|x_{i_0}| \leqslant |a|$. 所以 $|x_i| \leqslant |a|, i=0,1,\cdots,n+1$.

5 给定正整数 $n \geqslant 2$，设正整 $a_i(i=1,2,\cdots,n)$ 满足 $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ 以及 $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i} \leqslant 1$. 求证：对任意实数 x，有

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i^2+x^2}\right)^2 \leqslant \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{a_1(a_1-1)+x^2}$$

解 当 $x^2 \geqslant a_1(a_1-1)$ 时，由 $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i} \leqslant 1$，可得

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i^2+x^2}\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2a_i|x|}\right)^2 = \frac{1}{4x^2}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)^2 \leqslant$$

$$\frac{1}{4x^2} \leqslant \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a_1(a_1-1)+x^2}$$

当 $x^2 < a_1(a_1-1)$ 时,由柯西不等式得

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i^2+x^2}\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{(a_i^2+x^2)^2}\right) \leqslant$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a^i}{(a_i^2+x^2)^2}$$

对于正整数 $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$,有 $a_{i+1} \geqslant a_i + 1, i = 1, 2, \cdots, n-1$,且

$$\frac{2a_i}{(a_i^2+x^2)^2} \leqslant \frac{2a_i}{\left(a_i^2+x^2+\frac{1}{4}\right)^2 - a_i^2} =$$

$$\frac{2a_i}{\left(\left(a_i-\frac{1}{2}\right)^2+x^2\right)\left(\left(a_i+\frac{1}{2}\right)^2+x^2\right)} =$$

$$\frac{1}{\left(a_i-\frac{1}{2}\right)^2+x^2} - \frac{1}{\left(a_i+\frac{1}{2}\right)^2+x^2} \leqslant$$

$$\frac{1}{\left(a_i-\frac{1}{2}\right)^2+x^2} - \frac{1}{\left(a_{i+1}-\frac{1}{2}\right)^2+x^2}$$

$$i = 1, 2, \cdots, n-1$$

所以

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{(a_i^2+x^2)^2} \leqslant$$

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\left(a_i-\frac{1}{2}\right)^2+x^2} - \frac{1}{\left(a_{i+1}-\frac{1}{2}\right)^2+x^2}\right) \leqslant$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\left(a_1-\frac{1}{2}\right)^2+x^2} \leqslant \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a_1(a_1-1)+x^2}$$

6 证明:除了有限个正整数外,其他正整数 n 均可表示为 2 004 个正整数之和,即

$$n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{2\,004}$$

且满足:$1 \leqslant a_1 < a_2 < \cdots < a_{2\,004}, a_i \mid a_{i+1}, i = 1, 2, \cdots, 2\,003$.

解 将证明如下更一般的结论:

对任给正整数 $r \geqslant 2$,总存在 $N(r)$,当 $n \geqslant N(r)$ 时,存在正整数 $a_1, a_2, \cdots, a_r$,使得

$$n = a_1 + a_2 + \cdots + a_r$$
$$1 \leqslant a_1 < a_2 < \cdots < a_r$$
$$a_i \mid a_{i+1}, i = 1,2,\cdots,r-1$$

当 $r = 2$ 时,有 $n = 1 + n - 1$,取 $N(2) = 3$ 即可.

假设当 $r = k$ 时,结论成立,当 $r = k + 1$ 时,取 $N(k+1) = 4N(k)^3$.

设 $n = 2^\alpha(2l+1)$,如果
$$n \geqslant N(k+1) = 4N(k)^3$$
则
$$2^\alpha \geqslant 2N(k)^2$$
或
$$2l + 1 > 2N(k)$$

若 $2^\alpha \geqslant 2N(k)^2$,则存在正偶数 $2t \leqslant \alpha$,使 $2^{2t} \geqslant N(k)^2$.

此时 $2^t + 1 \geqslant N(k)$,由归纳假设存在正整数 $b_1, b_2, \cdots, b_k$,使得
$$2^t + 1 = b_1 + b_2 + \cdots + b_k$$
其中
$$1 \leqslant b_1 < \cdots < b_k, b_i \mid b_{i+1}, i = 1, \cdots, k$$
这样
$$2^\alpha = 2^{\alpha-2t} \cdot 2^{2t} = 2^{\alpha-2t}(1 + (2^t - 1)(2^t + 1)) = 2^{\alpha-2t} + 2^{\alpha-2t}(2^t - 1)b_1 + 2^{\alpha-2t}(2^t - 1)b_2 + \cdots + 2^{\alpha-2t}(2^t - 1)b_k$$
$$n = 2^{\alpha-2t}(2l+1) + 2^{\alpha-2t}(2^t - 1)b_1(2l+1) + \cdots + 2^{\alpha-2t}(2^t - 1)b_k(2l+1)$$

若 $2l + 1 > 2N(k)$,则 $l \geqslant N(k)$,由归纳假设存在正整数 $c_1, c_2, \cdots, c_k$,使得
$$l = c_1 + c_2 + \cdots + c_k$$
其中
$$1 \leqslant c_1 < c_2 < \cdots < c_k, c_i \mid c_{i+1}, i = 1, \cdots, k-1$$
因此
$$n = 2^\alpha + 2^{\alpha+1}c_1 + 2^{\alpha+1}c_2 + \cdots + 2^{\alpha+1}c_k$$
满足要求.

由归纳法知上述一般结论对所有 $r \geqslant 2$ 成立.

第 20 届中国数学奥林匹克

郑州,2005

1 设 $\theta_i \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $i = 1,2,3,4$. 证明:存在 $x \in \mathbf{R}$,使得如下两个不等式

$$\cos^2\theta_1\cos^2\theta_2 - (\sin\theta_1\sin\theta_2 - x)^2 \geqslant 0 \quad ①$$

$$\cos^2\theta_3\cos^2\theta_4 - (\sin\theta_3\sin\theta_4 - x)^2 \geqslant 0 \quad ②$$

同时成立的充要条件是

$$\sum_{i=1}^{4}\sin^2\theta_i \leqslant 2\left(1 + \prod_{i=1}^{4}\sin\theta_i + \prod_{i=1}^{4}\cos\theta_i\right) \quad ③$$

证明 显然,① 和 ② 分别等价于

$$\sin\theta_1\sin\theta_2 - \cos\theta_1\cos\theta_2 \leqslant x \leqslant \sin\theta_1\sin\theta_2 + \cos\theta_1\cos\theta_2 \quad ④$$

$$\sin\theta_3\sin\theta_4 - \cos\theta_3\cos\theta_4 \leqslant x \leqslant \sin\theta_3\sin\theta_4 + \cos\theta_3\cos\theta_4 \quad ⑤$$

不难知道,存在 $x \in \mathbf{R}$,使得 ④ 和 ⑤ 同时成立的充分必要条件是

$$\sin\theta_1\sin\theta_2 + \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_3\sin\theta_4 + \cos\theta_3\cos\theta_4 \geqslant 0 \quad ⑥$$

$$\sin\theta_3\sin\theta_4 + \cos\theta_3\cos\theta_4 - \sin\theta_1\sin\theta_2 + \cos\theta_1\cos\theta_2 \geqslant 0 \quad ⑦$$

另一方面,利用 $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$,可将式 ③ 化为

$$\cos^2\theta_1\cos^2\theta_2 + 2\cos\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_3\cos\theta_4 + \cos^2\theta_3\cos^2\theta_4 -$$
$$\sin^2\theta_1\sin^2\theta_2 + 2\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3\sin\theta_4 - \sin^2\theta_3\sin^2\theta_4 \geqslant 0$$

即

$$(\cos\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_3\cos\theta_4)^2 - (\sin\theta_1\sin\theta_2 - \sin\theta_3\sin\theta_4)^2 \geqslant 0$$

亦即

$$(\sin\theta_1\sin\theta_2 + \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_3\sin\theta_4 + \cos\theta_3\cos\theta_4)\cdot$$
$$(\sin\theta_3\sin\theta_4 + \cos\theta_3\cos\theta_4 - \sin\theta_1\sin\theta_2 + \cos\theta_1\cos\theta_2) \geqslant 0 \quad ⑧$$

当存在 $x \in \mathbf{R}$,使得 ④ 和 ⑤ 同时成立时,由 ⑥ 和 ⑦ 立即可以推出 ⑧,从而有式 ③ 成立.

反之,当式 ③,亦即式 ⑧ 成立时,如果 ⑥ 和 ⑦ 不成立,那么就有

$$\sin\theta_1\sin\theta_2 + \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_3\sin\theta_4 + \cos\theta_3\cos\theta_4 < 0$$

$$\sin\theta_3\sin\theta_4+\cos\theta_3\cos\theta_4-\sin\theta_1\sin\theta_2+\cos\theta_1\cos\theta_2<0$$

两式相加,得

$$2(\cos\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_3\cos\theta_4)<0$$

此与 $\theta_i\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, $i=1,2,3,4$ 的事实相矛盾,所以必有 ⑥ 和 ⑦ 同时成立,因此存在 $x\in\mathbf{R}$ 使得 ④ 和 ⑤ 同时成立.

2 一圆与 $\triangle ABC$ 的三边 BC,CA,AB 的交点依次为 D_1,D_2; E_1,E_2; F_1,F_2. 线段 D_1E_1 与 D_2F_2 交于点 L,线段 E_1F_1 与 E_2D_2 交于点 M,线段 F_1D_1 与 F_2E_2 交于点 N. 证明:AL,BM,CN 三线共点.

证明 如图 1,自点 L 作 AB 和 AC 的垂线,垂足分别为 L' 和 L''. 记 $\angle LAB=\alpha_1$, $\angle LAC=\alpha_2$, $\angle LF_2A=\alpha_3$, $\angle LE_1A=\alpha_4$. 则有

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}=\frac{LL'}{LL''}=\frac{LF_2\sin\alpha_3}{LE_1\sin\alpha_4} \quad ①$$

联结 D_1F_2,D_2E_1(图 1). 由 $\triangle LD_1F_2\backsim\triangle LD_2E_1$ 得

$$\frac{LF_2}{LE_1}=\frac{D_1F_2}{D_2E_1} \quad ②$$

联结 D_2F_1,D_1E_2(图 2). 由正弦定理得

$$\frac{\sin\alpha_3}{\sin\alpha_4}=\frac{D_2F_1}{D_1E_2} \quad ③$$

将 ② 和 ③ 代入 ①,得到

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}=\frac{D_1F_2}{D_2E_1}\cdot\frac{D_2F_1}{D_1E_2} \quad ④$$

同理,记 $\angle MBC=\beta_1$, $\angle MBA=\beta_2$, $\angle NCA=\gamma_1$, $\angle NCB=\gamma_2$,可得

$$\frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2}=\frac{E_1D_2}{E_2F_1}\cdot\frac{E_2D_1}{E_1F_2} \quad ⑤$$

$$\frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2}=\frac{F_1E_2}{F_2D_1}\cdot\frac{F_2E_1}{F_1D_2} \quad ⑥$$

将 ④,⑤,⑥ 式相乘,得

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}\cdot\frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2}\cdot\frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2}=1$$

由塞瓦定理的逆定理,即知 AL,BM,CN 三线共点.

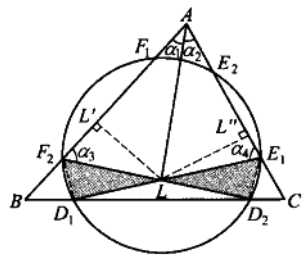


图 1

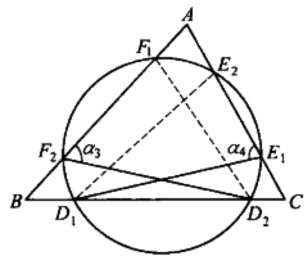


图 2

3 如图 1,圆形的水池被分割为 $2n(n \geqslant 5)$ 个"格子".我们把有公共隔墙(公共边或公共弧)的"格子"称为相邻的,从而每个"格子"都有三个邻格.

水池中一共跳入了 $4n+1$ 只青蛙,青蛙难于安静共处,只要某个"格子"中有不少于 3 只青蛙,那么迟早一定会有其中 3 只分别同时跳往三个不同邻格.证明:只要经过一段时间之后,青蛙便会在水池中大致分布均匀.

所谓大致分布均匀,就是任取其中一个"格子",或者它里面有青蛙,或者它的三个邻格里都有青蛙.

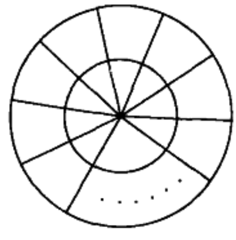


图 1

证明 我们把一个格子中出现一次 3 只青蛙同时分别跳向三个邻格的事件称为该格子发生一次"爆发".而把一个格子或者是它里面有青蛙,或者是它的三个相邻的格子里面都有青蛙,称为该格子处于"平衡状态".

容易看出,一个格子只要一旦有青蛙跳入,那么它就一直处于"平衡状态".事实上,只要不"爆发",那么该格子中的青蛙不会动,它当然处于"平衡状态";而如果发生"爆发",那么它的三个邻格中就都有青蛙,并且只要三个邻格都不"爆发",那么它就一直处于"平衡状态";而不论哪个邻格发生"爆发",都会有青蛙跳到它里面,它里面就一定有青蛙,所以它也一直处于"平衡状态".

这样一来,为证明题中断言,我们就只要证明:任何一个格子都迟早会有青蛙跳入.

任取一个格子,把它称为格 A,把它所在的扇形称为 1 号扇形,把该扇形中的另一个格子称为格 B,如图 2 所示.我们要证明格 A 迟早会有青蛙跳入.

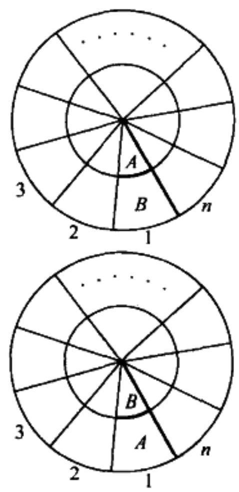


图 2

按顺时针方向依次将其余扇形接着编为 2 至 n 号.首先证明 1 号扇形迟早会有青蛙跳入.假设 1 号扇形中永无青蛙到来,那么就不会有青蛙越过 1 号扇形与 n 号扇形之间的隔墙.我们来考察青蛙所在的扇形编号的平方和.由于没有青蛙进入 1 号扇形(尤其没有青蛙越过 1 号扇形与 n 号扇形之间的隔墙),所以只能是有 3 只青蛙由某个 $k(3 \leqslant k \leqslant n-1)$ 号扇形分别跳入 $k-1$,k 和 $k+1$ 号扇形各一只,因此平方和的变化量为

$$(k-1)^2+k^2+(k+1)^2-3k^2=2$$

即增加 2.一方面,由于青蛙的跳动不会停止(因为总有一个格子里有不少于 3 只青蛙),所以平方和的增加趋势不会停止;但是另一方面,青蛙所在扇形编号的平方和不可能永无止境地增加下去(不会大于 $(4n+1)n^2$),由此产生矛盾,所以迟早会有青蛙越过 1

号扇形与 n 号扇形之间的隔墙,进入 1 号扇形.

我们再来证明 1 号扇形迟早会有 3 只青蛙跳入.如果 1 号扇形中至多有两只青蛙跳入,那么它们都不会跳走,并且自始至终上述平方和至多有两次变小(只能在两只青蛙越过 1 号扇形与 n 号扇形之间的隔墙时变小),以后便一直持续不断地上升,从而又重蹈刚才的矛盾.所以 1 号扇形迟早会有 3 只青蛙跳入.

如果这 3 只青蛙中有位于格 A 的,那么格 A 中已经有青蛙跳入;如果这 3 只青蛙全都位于格 B,那么格 B 会发生"爆发",从而有青蛙跳入格 A.

4 已知数列 $\{a_n\}$ 满足条件 $a_1=\dfrac{21}{16}$,及

$$2a_n-3a_{n-1}=\frac{3}{2^{n+1}},n\geqslant 2 \quad ①$$

设 m 为正整数,$m\geqslant 2$.证明:当 $n\leqslant m$ 时,有

$$\left(a_n+\frac{3}{2^{n+3}}\right)^{\frac{1}{m}}\left(m-\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n(m-1)}{m}}\right)<\frac{m^2-1}{m-n+1} \quad ②$$

证明 由式 ① 得

$$2^n a_n=3\cdot 2^{n-1}a_{n-1}+\frac{3}{4}$$

记 $b_n=2^n a_n,n=1,2,\cdots$,则

$$b_n=3b_{n-1}+\frac{3}{4},b_n+\frac{3}{8}=3\left(b_{n-1}+\frac{3}{8}\right)$$

由于 $b_1=2a_1=\dfrac{21}{8}$,所以

$$b_n+\frac{3}{8}=3^{n-1}\left(b_1+\frac{3}{8}\right)=3^n$$

故得

$$a_n=\left(\frac{3}{2}\right)^n-\frac{3}{2^{n+3}}$$

因此,为证明 ②,只须证明

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{n}{m}}\left(m-\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n(m-1)}{m}}\right)<\frac{m^2-1}{m-n+1}$$

即只须证

$$\left(1-\frac{n}{m+1}\right)\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{n}{m}}\left(m-\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n(m-1)}{m}}\right)<m-1 \quad ③$$

首先估计 $1-\dfrac{n}{m+1}$ 的上界,由贝努里不等式,有

$$1-\frac{n}{m+1}<\left(1-\frac{1}{m+1}\right)^n$$

所以

$$\left(1-\frac{n}{m+1}\right)^{m}<\left(1-\frac{1}{m+1}\right)^{nm}=\left(\frac{m}{m+1}\right)^{nm}=\left(\frac{1}{\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}}\right)^{n}$$

(注:也可以根据平均不等式导出

$$\left(1-\frac{n}{m+1}\right)^{m}=\left(1-\frac{n}{m+1}\right)^{m}\underbrace{\cdot 1\cdot 1\cdot\cdots\cdot 1}_{mn-m\text{个}1}<\left(\frac{m\left(1-\frac{n}{m+1}\right)+mn-m}{mn}\right)^{mn}=\left(\frac{m}{m+1}\right)^{nm})$$

由于 $m\geqslant 2$,根据二项式定理,可得

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}\geqslant 1+C_m^1\cdot\frac{1}{m}+C_m^2\cdot\frac{1}{m^2}=\frac{5}{2}-\frac{1}{2m}\geqslant\frac{9}{4}$$

所以
$$\left(1-\frac{n}{m+1}\right)^{m}<\left(\frac{4}{9}\right)^{n}$$

即
$$1-\frac{n}{m+1}<\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2n}{m}}$$

因此,欲证 ③,只须证

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2n}{m}}\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{n}{m}}\left(m-\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n(m-1)}{m}}\right)<m-1$$

即

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n}{m}}\left(m-\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n(m-1)}{m}}\right)<m-1 \qquad ④$$

记 $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n}{m}}=t$,则 $0<t<1$,式 ④ 化为

$$t(m-t^{m-1})<m-1$$

即
$$(t-1)(m-(t^{m-1}+t^{m-2}+\cdots+1))<0$$

此不等式显然成立,从而原不等式成立.

5 在面积为1的矩形 $ABCD$ 中(包括边界)有5个点,其中任意三点不共线.求以这 5 个点为顶点的所有三角形中,面积不大于 $\frac{1}{4}$ 的三角形的个数的最小值.

解 本题证明需要用到如下的常用结论,我们将其作为一个引理:矩形内的任意一个三角形的面积不大于矩形面积的一半.

在矩形 $ABCD$ 中,如果某三点构成的三角形的面积不大于 $\frac{1}{4}$,就称它们为一个好的三点组,简称为"好组".

记 AB,CD,BC,AD 的中点分别为 E,F,H,G,线段 EF 与 GH

的交点记为 O. 线段 EF 和 GH 将矩形 $ABCD$ 分为四个小矩形. 从而一定存在一个小矩形, 不妨设为 $AEOG$, 其中(包括边界, 下同)至少有所给5个点中的2个点, 设点 M 和 N 在小矩形 $AEOG$ 中, 如图1所示.

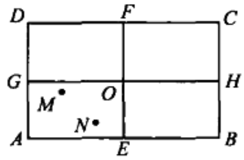


图 1

(1) 如果矩形 $OHCF$ 中有不多于1个已知点, 考察不在矩形 $OHCF$ 中的任意一个不同于 M 和 N 的已知点 X. 易知, 三点组 (M,N,X) 或者在矩形 $ABHG$ 中, 或者在矩形 $AEFD$ 中, 由引理可知 (M,N,X) 是好组. 由于这样的点 X 至少有两个, 所以至少有两个好组.

(2) 如果矩形 $OHCF$ 中至少有2个已知点, 不妨设已知点 P 和 Q 都在矩形 $OHCF$ 中, 考察剩下来的最后一个已知点 R. 如果 R 在矩形 $OFDG$ 中, 则三点组 (M,N,R) 在矩形 $AEFD$ 中, 而三点组 (P,Q,R) 在矩形 $GHCD$ 中, 从而它们都是好组, 于是至少有两个好组. 同理, 如果点 R 在矩形 $EBHO$ 中, 亦至少有两个好组. 如果点 R 在矩形 $OHCF$ 或矩形 $AEOG$ 中, 设点 R 在矩形 $OHCF$ 中, 我们来考察5个点 M,N,P,Q,R 的凸包, 该凸包一定在凸六边形 $AEHCFG$ 中, 如图2所示, 而

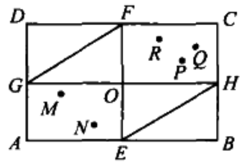


图 2

$$S_{AEHCFG}=1-\frac{1}{8}-\frac{1}{8}=\frac{3}{4}$$

下面再分三种情况讨论:

i 如果 M,N,P,Q,R 的凸包是凸五边形, 不妨设其为 $MNPQR$, 如图3所示, 此时

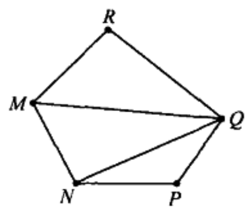


图 3

$$S_{\triangle MQR}+S_{\triangle MNQ}+S_{\triangle NPQ}\leqslant\frac{3}{4}$$

从而 (M,Q,R), (M,N,Q), (N,P,Q) 中至少有一个为好组. 又由于 (P,Q,R) 在矩形 $OHCF$ 中, 当然是好组, 所以至少有两个好组.

ii 如果 M,N,P,Q,R 的凸包是凸四边形, 不妨其设为 $A_1A_2A_3A_4$, 而另一个已知点为 A_5, 如图4所示, 其中 $A_i\in\{M,N,P,Q,R\}(i=1,2,3,4,5)$. 联结 $A_5A_i(i=1,2,3,4)$, 则

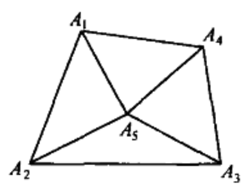


图 4

$$S_{\triangle A_1A_2A_5}+S_{\triangle A_2A_3A_5}+S_{\triangle A_3A_4A_5}+S_{\triangle A_4A_1A_5}=S_{A_1A_2A_3A_4}\leqslant\frac{3}{4}$$

从而 (A_1,A_2,A_5), (A_2,A_3,A_5), (A_3,A_4,A_5), (A_1,A_4,A_5) 中至少有两个好组.

iii 若 M,N,P,Q,R 的凸包是一个三角形, 不妨设其为 $\triangle A_1A_2A_3$, 另外两个已知点为 A_4,A_5, 如图5所示, 其中 $A_i\in\{M,N,P,Q,R\}(i=1,2,3,4,5)$. 联结 $A_4A_i(i=1,2,3)$, 则

$$S_{\triangle A_1A_2A_4}+S_{\triangle A_2A_3A_4}+S_{\triangle A_3A_1A_4}=S_{\triangle A_1A_2A_3}\leqslant\frac{3}{4}$$

从而(A_1,A_2,A_4),(A_2,A_3,A_4),(A_1,A_3,A_4)中至少有一个好组.同理,A_5也与A_1,A_2,A_3中的某两个点构成好组,所以此时也至少有两个好组.

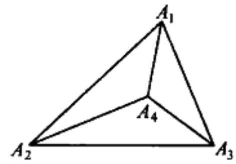


图 5

综上所述,不论何种情况,在 5 个已知点中都至少有两个好组.

下面我们给出例子说明好组的数目可以只有两个.在矩形 $ABCD$ 的边 AD 上取一点 M,在边 AB 上取一点 N.使得 $AN:NB=AM:MD=2:3$,如图 6 所示,则在 M,N,B,C,D 这 5 个点中恰好有两个好组.事实上,(B,C,D) 显然不是好组.而如果三点组中恰含 M,N 两点之一,不妨设含点 M,设 AD 的中点为 E,那么 $S_{\triangle MBD}=S_{\triangle EBD}=\frac{1}{4}$,所以$(M,B,D)$不是好组,并且

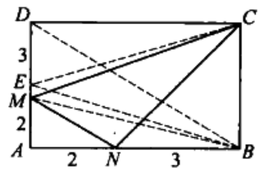


图 6

$$S_{\triangle MBC}=\frac{1}{2},S_{\triangle MCD}>S_{\triangle ECD}=\frac{1}{4}$$

从而(M,B,C),(M,C,D)都不是好组.如果三点组中同时含有 M,N 两点,那么

$$S_{\triangle MNC}=1-S_{\triangle NBC}-S_{\triangle MCD}-S_{\triangle AMN}=$$
$$1-\frac{3}{5}S_{\triangle ABC}-\frac{3}{5}S_{\triangle ACD}-\frac{4}{25}S_{\triangle ABD}=$$
$$1-\frac{3}{10}-\frac{3}{10}-\frac{2}{25}=\frac{8}{25}>\frac{1}{4}$$

所以(M,N,C)不是好组,而 $S_{\triangle MNB}=S_{\triangle MND}=\frac{1}{5}<\frac{1}{4}$,从而其中恰好有两个好组$(M,N,B)$和$(M,N,D)$.

故面积不大于$\frac{1}{4}$的三角形的个数的最小值是 2.

6 求方程

$$2^x\cdot 3^y-5^z\cdot 7^w=1$$

的所有非负整数解(x,y,z,w).

解 由 $5^z\cdot 7^w+1$ 为偶数,知 $x\geqslant 1$.

i 若 $y=0$,此时

$$2^x-5^z\cdot 7^w=1$$

若 $z\neq 0$,则 $2^x\equiv 1 \pmod 5$,由此得$4\mid x$.因此$3\mid 2^x-1$,这与$2^x-5^z\cdot 7^w=1$矛盾.

若 $z=0$,则

$$2^x-7^w=1$$

当 $x=1,2,3$ 时,直接计算可得$(x,w)=(1,0),(3,1)$.

当 $x\geqslant 4$ 时,有 $7^w\equiv -1 \pmod{16}$,直接计算知这不可能.

所以,当 $y=0$ 时,全部的非负整数解为

$$(x,y,z,w)=(1,0,0,0),(3,0,0,1)$$

ii 若 $y>0,x=1$,则

$$2\cdot 3^y-5^z\cdot 7^w=1$$

因此 $-5^z\cdot 7^w\equiv 1(\bmod 3)$,即 $(-1)^z\equiv -1(\bmod 3)$,从而 z 为奇数,故

$$2\cdot 3^y\equiv 1(\bmod 5)$$

由此知 $$y\equiv 1(\bmod 4)$$

当 $w\neq 0$ 时,有 $2\cdot 3^y\equiv 1(\bmod 7)$,因此得 $y\equiv 4(\bmod 6)$,此与 $y\equiv 1(\bmod 4)$ 矛盾,所以 $w=0$,于是

$$2\cdot 3^y-5^z=1$$

当 $y=1$ 时,$z=1$.当 $y\geqslant 2$ 时,有 $5^z\equiv -1(\bmod 9)$,由此知 $z\equiv 3(\bmod 6)$,因此 $5^3+1\mid 5^z+1$,故 $7\mid 5^z+1$,这与 $5^z+1=2\cdot 3^y$ 矛盾.故此种情形的解为

$$(x,y,z,w)=(1,1,1,0)$$

iii 若 $y>0,x\geqslant 2$,此时

$$5^z\cdot 7^w\equiv -1(\bmod 4),5^z\cdot 7^w\equiv -1(\bmod 3)$$

即 $$(-1)^w\equiv -1(\bmod 4),(-1)^z\equiv -1(\bmod 3)$$

因此 z 和 w 都是奇数,从而

$$2^x\cdot 3^y=5^z\cdot 7^w+1\equiv 35+1\equiv 4(\bmod 8)$$

所以 $x=2$,原方程变为

$$4\cdot 3^y-5^z\cdot 7^w=1(\text{其中 } z \text{ 和 } w \text{ 均为奇数}) \qquad ①$$

由此知 $$4\cdot 3^y\equiv 1(\bmod 5),4\cdot 3^y\equiv 1(\bmod 7)$$

从上面两式得 $y\equiv 2(\bmod 12)$.

设 $y=12m+2,m\geqslant 0$,于是

$$5^z\cdot 7^w=4\cdot 3^y-1=(2\cdot 3^{6m+1}-1)(2\cdot 3^{6m+1}+1)$$

因为 $$2\cdot 3^{6m+1}+1\equiv 6\cdot 2^{3m}+1\equiv 6+1\equiv 0(\bmod 7)$$

又因为 $$(2\cdot 3^{6m+1}-1,2\cdot 3^{6m+1}+1)=1$$

所以,$5\mid 2\cdot 3^{6m+1}-1$,于是

$$2\cdot 3^{6m+1}-1=5^z \qquad ②$$

$$2\cdot 3^{6m+1}+1=7^w$$

若 $m\geqslant 1$,则由 ② 得 $5^z\equiv -1(\bmod 9)$,由 ii 知,不可能.

若 $m=0$,则 $y=2,z=1,w=1$.

故此种情形的解为

$$(x,y,z,w)=(2,2,1,1)$$

综上所述,所求的非负整数解为

$$(x,y,z,w)=(1,0,0,0),(3,0,0,1)=(1,1,1,0),(2,2,1,1)$$

第21届中国数学奥林匹克

福州,2006

1 实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 满足 $a_1+a_2+\cdots+a_n=0$,求证:

$$\max_{1\leqslant k\leqslant n}(a_k^2)\leqslant\frac{n}{3}\sum_{i=1}^{n-1}(a_i-a_{i+1})^2$$

证明 只须对任意 $1\leqslant k\leqslant n$,证明不等式成立即可.

记 $d_k=a_k-a_{k+1},k=1,2,\cdots,n-1$,则

$$a_k=a_k$$

$$a_{k+1}=a_k-d_k,a_{k+2}=a_k-d_k-d_{k+1},\cdots,$$

$$a_n=a_k-d_k-d_{k+1}-\cdots-d_{n-1}$$

$$a_{k-1}=a_k+d_{k-1},a_{k-2}=a_k+d_{k-1}+d_{k-2},\cdots,$$

$$a_1=a_k+d_{k-1}+d_{k-2}+\cdots+d_1$$

把上面这 n 个等式相加,并利用 $a_1+a_2+\cdots+a_n=0$ 可得

$$na_k-(n-k)d_k-(n-k-1)d_{k+1}-\cdots-d_{n-1}+(k-1)d_{k-1}+(k-2)d_{k-2}+\cdots+d_1=0$$

由柯西不等式可得

$$(na_k)^2=((n-k)d_k+(n-k-1)d_{k+1}+\cdots+d_{n-1}-(k-1)d_{k-1}-(k-2)d_{k-2}-\cdots-d_1)^2\leqslant\left(\sum_{i=1}^{k-1}i^2+\sum_{i=1}^{n-k}i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n-1}d_i^2\right)\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n-1}i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n-1}d_i^2\right)=\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}\left(\sum_{i=1}^{n-1}d_i^2\right)\leqslant\frac{n^3}{3}\left(\sum_{i=1}^{n-1}d_i^2\right)$$

所以

$$a_k^2\leqslant\frac{n}{3}\sum_{i=1}^{n-1}(a_i-a_{i+1})^2$$

2 正整数 $a_1,a_2,\cdots,a_{2\,006}$(可以有相同的)使得 $\frac{a_1}{a_2},\frac{a_2}{a_3},\cdots,\frac{a_{2\,005}}{a_{2\,006}}$ 两两不相等.问:$a_1,a_2,\cdots,a_{2\,006}$ 中最少有多少个不同的数?

解 $a_1,a_2,\cdots,a_{2\,006}$ 中最少有46个互不相同的数.

由于 45 个互不相同的正整数两两比值至多有 $45\times 44+1=1\,981$ 个,故 $a_1,a_2,\cdots,a_{2\,006}$ 中互不相同的数大于 45.

下面构造一个例子,说明 46 是可以取到的.

设 $p_1,p_2,\cdots,p_{46}$ 为 46 个互不相同的素数,构造 $a_1,a_2,\cdots,a_{2\,006}$ 如下

$$p_1,p_1,p_2,p_1,p_3,p_2,p_3,p_1,p_4,p_3,p_4,p_2,p_4,p_1,\cdots,$$
$$p_1,p_k,p_{k-1},p_k,p_{k-2},p_k,\cdots,p_k,p_2,p_k,p_1,\cdots,$$
$$p_1,p_{45},p_{44},p_{45},p_{43},p_{45},\cdots,p_{45},p_2,p_{45},p_1,$$
$$p_{46},p_{45},p_{46},p_{44},p_{46},\cdots,p_{46},p_{22},p_{46}$$

这 2 006 个正整数满足要求.

所以 $a_1,a_2,\cdots,a_{2\,006}$ 中最少有 46 个互不相同的数.

3 正整数 m,n,k 满足 $mn=k^2+k+3$,证明不定方程

$$x^2+11y^2=4m$$

和

$$x^2+11y^2=4n$$

中至少有一个有奇数解 (x,y).

证法 1 首先我们证明如下一个引理.

引理 不定方程

$$x^2+11y^2=4m \qquad ①$$

或有奇数解 (x_0,y_0),或有满足

$$x_0\equiv(2k+1)y_0 \pmod m \qquad ②$$

的偶数解 (x_0,y_0).

引理的证明 考虑如下表示

$$x+(2k+1)y,\ x,y \text{ 为整数,且 } 0\leqslant x\leqslant 2\sqrt{m},\ 0\leqslant y\leqslant \frac{\sqrt{m}}{2}$$

则共有 $(2[\sqrt{m}]+1)\left(\left[\frac{\sqrt{m}}{2}\right]+1\right)>m$ 个表示,因此存在整数 $x_1,x_2\in[0,2\sqrt{m}]$, $y_1,y_2\in\left[0,\frac{\sqrt{m}}{2}\right]$,满足 $(x_1,y_1)\neq(x_2,y_2)$,且

$$x_1+(2k+1)y_1\equiv x_2+(2k+1)y_2 \pmod m$$

这表明

$$x\equiv(2k+1)y \pmod m \qquad ③$$

这里 $x=x_1-x_2$, $y=y_2-y_1$. 由此可得

$$x^2\equiv(2k+1)^2y^2\equiv-11y^2 \pmod m$$

故 $x^2+11y^2=km$,因为 $|x|\leqslant 2\sqrt{m}$, $|y|\leqslant\frac{\sqrt{m}}{2}$,所以

$$x^2+11y^2<4m+\frac{11}{4}m<7m$$

于是 $1 \leqslant k \leqslant 6$. 因为 m 为奇数, $x^2+11y^2=2m$, $x^2+11y^2=6m$ 显然没有整数解.

(1) 若 $x^2+11y^2=m$, 则 $x_0=2x$, $y_0=2y$ 是方程①满足②的解.

(2) 若 $x^2+11y^2=4m$, 则 $x_0=x$, $y_0=y$ 是方程①满足②的解.

(3) 若 $x^2+11y^2=3m$, 则 $(x\pm 11y)^2+11(x\mp y)^2=3^2\cdot 4m$.

首先假设 $3 \nmid m$, 若 $x\not\equiv 0 \pmod 3$, $y\not\equiv 0 \pmod 3$, 且 $x\not\equiv y \pmod 3$, 则

$$x_0=\frac{x-11y}{3}, y_0=\frac{x+y}{3} \qquad ④$$

是方程①满足②的解. 若 $x\equiv y\not\equiv 0 \pmod 3$, 则

$$x_0=\frac{x+11y}{3}, y_0=\frac{y-x}{3} \qquad ⑤$$

是方程①满足②的解.

现在假设 $3 \mid m$, 则公式④和⑤仍然给出方程①的整数解. 若方程①有偶数解 $x_0=2x_1$, $y_0=2y_1$, 则

$$x_1^2+11y_1^2=m \Leftrightarrow 36m=(5x_1\pm 11y_1)^2+11(5y_1\mp x_1)^2$$

因为 x_1, y_1 的奇偶性不同, 所以 $5x_1\pm 11y_1$, $5y_1\mp x_1$ 都为奇数.

若 $x\equiv y \pmod 3$, 则 $x_0=\dfrac{5x_1-11y_1}{3}$, $y_0=\dfrac{5y_1+x_1}{3}$ 是方程①的一奇数解.

若 $x_1\not\equiv y_1 \pmod 3$, 则 $x_0=\dfrac{5x_1+11y_1}{3}$, $y_0=\dfrac{5y_1-x_1}{3}$ 是方程①的一奇数解.

(4) $x^2+11y^2=5m$, 则

$$5^2\cdot 4m=(3x\mp 11y)^2+11(3y\pm x)^2$$

当 $5\nmid m$ 时, 若 $x\equiv\pm 1 \pmod 5$, $y\equiv\mp 2 \pmod 5$, 或 $x\equiv\pm 2 \pmod 5$, $y\equiv\pm 1 \pmod 5$, 则

$$x_0=\frac{3x-11y}{5}, y_0=\frac{3y+x}{5} \qquad ⑥$$

是方程①满足②的解.

若 $x\equiv\pm 1 \pmod 5$, $y\equiv\pm 2 \pmod 5$, 或 $x\equiv\pm 2 \pmod 5$, $y\equiv\mp 1 \pmod 5$, 则

$$x_0=\frac{3x+11y}{5}, y_0=\frac{3y-x}{5} \qquad ⑦$$

是方程①满足②的解.

当 $5 \mid m$, 则公式⑥和⑦仍然给出方程①的整数解. 若方程①有偶数解 $x_0=2x_1$, $y_0=2y_1$, 则

$$x_1^2+11y_1^2=m, x_1\not\equiv y_1 \pmod 2$$

可得 $$100m = (x_1 \mp 33y_1)^2 + 11(y_1 \pm 3x_1)^2$$

若 $x_1 \equiv y_1 \equiv 0 \pmod 5$，或者 $x_1 \equiv \pm 1 \pmod 5, y_1 \equiv \pm 2 \pmod 5$，或者 $x_1 \equiv \pm 2 \pmod 5, y_1 \equiv \mp 1 \pmod 5$，则 $x_0 = \frac{x_1 - 33y_1}{5}, y_0 = \frac{y_1 + 3x_1}{5}$ 是方程 ① 的一奇数解.

若 $x_1 \equiv \pm 1 \pmod 5, y_1 \equiv \mp 2 \pmod 5$，或 $x_1 \equiv \pm 2 \pmod 5$，$y_1 \equiv \pm 1 \pmod 5$，则

$$x_0 = \frac{x_1 + 33y_1}{5}, y_0 = \frac{y_1 - 33y_1}{5}$$

是方程 ① 的一奇数解.

引理证毕.

由引理，若方程 ① 没有奇数解，则它有一个满足 ② 的偶数解 (x_0, y_0). 令 $l = 2k + 1$，考虑二次方程

$$mx^2 + ly_0x + ny_0^2 - 1 = 0 \tag{8}$$

则 $$x = \frac{-ly_0 \pm \sqrt{l^2y_0^2 - 4mny_0^2 + 4m}}{2m} = \frac{-ly_0 \pm x_0}{2m}$$

这表明方程 ⑧ 至少有一个整数根 x_1，即

$$mx_1^2 + ly_0x_1 + ny_0^2 - 1 = 0 \tag{9}$$

上式表明 x_1 必为奇数. 将 ⑨ 乘以 $4n$ 后配方得

$$(2ny_0 + lx_1)^2 - 11x_1^2 = 4n$$

这表明方程 $x^2 + 11y^2 = 4n$ 有奇数解 $x = 2ny_0 + lx_1, y = x_1$.

证法 2 首先证明如下引理.

引理 令 m, n, t 是三个正整数，满足 $t^2 + 11 = 4mn$，则存在整数 u, v, x, y，使得下面三式之一成立：

(1) 当 u, v 为奇数时，有

$$\begin{cases} 4m = u^2 + 11v^2 \\ n = x^2 + 11y^2 \\ t = ux + 11vy \\ |uy - vx| = 1 \end{cases}$$

(2) 当 x, y 为奇数时，有

$$\begin{cases} m = u^2 + 11v^2 \\ 4n = x^2 + 11y^2 \\ t = ux + 11vy \\ |uy - vx| = 1 \end{cases}$$

(3) 当 u, v 为奇数，且 x, y 为奇数时，有

$$\begin{cases}4m = u^2 + 11v^2 \\ 4n = x^2 + 11y^2 \\ t = \dfrac{ux + 11vy}{2} \\ |uy - vx| = 2\end{cases}$$

引理的证明　我们对 t 用归纳法.

当 $t = 1$ 时,$(m,n) = (1,3),(3,1)$. 前者可取 $u = 1, v = 0, x = y = 1$,属于(2). 后者可取 $u = v = 1, x = 1, y = 0$,属于(1). 现在假设结论对小于 t 的自然数成立. 不妨设 $m \leqslant n$. 若 $m = n \Rightarrow 4m^2 - t^2 = 11 \Rightarrow m = n = 3, t = 5$. 此时可取 $u = v = 1, x = -1, y = 1$,(3) 成立. 若 $m = 1$,则可取 $u = 1, v = 0, x = t, y = 1$,(2) 成立. 下设

$$1 < m < n \Rightarrow n \geqslant m + 2 \Rightarrow$$

$$t^2 + 11 \geqslant 4m(m+2) > (2m)^2 + 11 \Rightarrow t > 2m$$

$$4mn = t^2 + 11 \Rightarrow 4m(m + n - t) = (t - 2m)^2 + 11$$

$$m + n \geqslant \sqrt{4mn} > t, 0 < t - 2m < t$$

由归纳法假设,(1),(2),(3) 之一对 $(m, m+n-t, t-2m)$ 成立.

如果对 $(m, m+n-t, t-2m)$,(1) 成立,则存在整数 u,v,x,y 使得

$$\begin{cases}4m = u^2 + 11v^2 \\ m + n - t = x^2 + 11y^2 \\ t - 2m = ux + 11vy \\ |uy - vx| = 1\end{cases}, u, v \text{ 为奇数}$$

从上式中解出 m,n,t 得

$$\begin{cases}4m = u^2 + 11v^2 \\ 4n = (2x + u)^2 + 11(2y + v)^2 \\ t = \dfrac{u(2x + u) + 11v(2y + v)}{2} \\ |u(2y + v) - v(2x + u)| = 2|uy - vx| = 2\end{cases}, u, v \text{ 为奇数}$$

即对 (m,n,t),(3) 成立.

如果对 $(m, m+n-t, t-2m)$,(2) 成立. 则存在整数 u,v,x,y,使得

$$\begin{cases}m = u^2 + 11v^2 \\ 4(m + n - t) = x^2 + 11y^2 \\ t - 2m = ux + 11vy \\ |uy - vx| = 1\end{cases}, x, y \text{ 为奇数}$$

从上式中解出 m,n,t 得

$$\begin{cases} m = u^2 + 11v^2 \\ 4n = (x + 2u)^2 + 11(y + 2v)^2 \\ t = u(x + 2u) + 11v(y + 2v) \\ |u(y + 2v) - v(x + 2u)| = |uy - vx| = 1 \end{cases}, u, v \text{ 为奇数}$$

即对(m, n, t),(2) 成立.

如果对$(m, m + n - t, t - 2m)$,(3) 成立,则存在整数u, v, x, y,使得

$$\begin{cases} 4m = u^2 + 11v^2 \\ 4(m + n - t) = x^2 + 11y^2 \\ t - 2m = \dfrac{ux + 11vy}{2} \\ |uy - vx| = 2 \end{cases}, u, v \text{ 为奇数}; x, y \text{ 为奇数}$$

从上式中解出m, n, t得

$$\begin{cases} 4m = u^2 + 11v^2 \\ n = \left(\dfrac{x + u}{2}\right)^2 + 11\left(\dfrac{y + v}{2}\right)^2 \\ t = u\left(\dfrac{x + u}{2}\right) + 11v\left(\dfrac{y + v}{2}\right) \\ \left|u\left(\dfrac{y + v}{2}\right) - v\left(\dfrac{x + u}{2}\right)\right| = \dfrac{|uy - vx|}{2} = 1 \end{cases}$$

即对(m, n, t),(1) 成立,引理证毕.

对$t = 2k + 1$应用上述引理立得此题结论.

4 在 Rt$\triangle ABC$ 中,$\angle ACB = 90°$,$\triangle ABC$ 的内切圆 O 分别与 BC, CA, AB 相切于点 D, E, F,联结 AD,与内切圆 O 相交于点 P.联结 BP, CP,若 $\angle BPC = 90°$,求证:$AE + AP = PD$.

证明 设 $AE = AF = x, BD = BF = y, CD = CE = z, AP = m, PD = n$. 因为 $\angle ACP + \angle PCB = 90° = \angle PBC + \angle PCB$,所以 $\angle ACP = \angle PBC$.

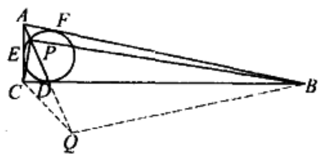


图 1

如图 1,延长 AD 至点 Q,使得 $\angle AQC = \angle ACP = \angle PBC$,联结 BQ, CQ,则 P, B, Q, C 四点共圆,令 $DQ = l$,则由相交弦定理和切割线定理可得

$$yz = nl \quad ①$$

$$x^2 = m(m + n) \quad ②$$

因为 $\triangle ACP \backsim \triangle AQC$,所以$\dfrac{AC}{AQ} = \dfrac{AP}{AC}$,故

$$(x + z)^2 = m(m + n + l) \quad ③$$

在 Rt△ACD 和 Rt△ACB 中,由勾股定理得

$$(x+z)^2+z^2=(m+n)^2 \quad ④$$

$$(y+z)^2+(z+x)^2=(x+y)^2 \quad ⑤$$

③ - ②,得

$$z^2+2zx=ml \quad ⑥$$

① ÷ ⑥,得 $$\frac{yz}{z^2+2zx}=\frac{n}{m}$$

所以

$$1+\frac{yz}{z^2+2zx}=\frac{m+n}{m} \quad ⑦$$

② × ⑦,结合 ④,得

$$x^2+\frac{x^2yz}{z^2+2zx}=(m+n)^2=(x+z)^2+z^2$$

整理得

$$\frac{x^2y}{z+2x}=2z(x+z) \quad ⑧$$

又式 ⑤ 可写为

$$x+z=\frac{2xy}{y+z} \quad ⑨$$

由 ⑧,⑨ 得

$$\frac{x}{z+2x}=\frac{4z}{y+z} \quad ⑩$$

又式 ⑤ 还可写为

$$y+z=\frac{2xz}{x-z} \quad ⑪$$

把上式代入 ⑩,消去 $y+z$,得

$$3x^2-2xz-2z^2=0$$

解得 $$x=\frac{\sqrt{7}+1}{3}z$$

代入 ④,得 $$m+n=\frac{2(\sqrt{7}+1)}{3}z$$

结合 ②,得 $$m=\frac{x^2}{m+n}=\frac{\sqrt{7}+1}{6}z$$

从而 $$n=\frac{\sqrt{7}+1}{2}z$$

所以,$x+m=n$,即 $AE+AP=PD$.

5 实数列 $\{a_n\}$ 满足

$$a_1 = \frac{1}{2}$$

$$a_{k+1} = -a_k + \frac{1}{2 - a_k}, k = 1,2,\cdots$$

证明:不等式

$$\left(\frac{n}{2(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)} - 1\right)^n \leqslant \left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right)^n \leqslant \left(\frac{1}{a_1} - 1\right)\left(\frac{1}{a_2} - 1\right)\cdots\left(\frac{1}{a_n} - 1\right)$$

证明 首先,用数学归纳法证明 $0 < a_n \leqslant \frac{1}{2}, n = 1,2,\cdots$,$n = 1$ 时,命题显然成立.

假设命题对 $n(n \geqslant 1)$ 成立,即有 $0 < a_n \leqslant \frac{1}{2}$.

设 $f(x) = -x + \frac{1}{2 - x}, x \in \left[0,\frac{1}{2}\right]$,则 $f(x)$ 是减函数,于是

$$a_{n+1} = f(a_n) \leqslant f(0) = \frac{1}{2}$$

$$a_{n+1} = f(a_n) \geqslant f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{6} > 0$$

即命题对 $n + 1$ 也成立.

原命题等价于

$$\left(\frac{n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}\right)^n\left(\frac{n}{2(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)} - 1\right)^n \leqslant \left(\frac{1}{a_1} - 1\right)\left(\frac{1}{a_2} - 1\right)\cdots\left(\frac{1}{a_n} - 1\right)$$

设 $f(x) = \ln\left(\frac{1}{x} - 1\right), x \in \left(0,\frac{1}{2}\right)$,则 $f(x)$ 是凹函数,即对 $0 < x_1, x_2 < \frac{1}{2}$,有

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leqslant \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

事实上 $$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leqslant \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

等价于 $$\left(\frac{2}{x_1 + x_2} - 1\right)^2 \leqslant \left(\frac{1}{x_1} - 1\right)\left(\frac{1}{x_2} - 1\right) \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 \geqslant 0$$

所以,由 Jenson 不等式可得

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right) \leqslant \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}$$

即 $$\left(\frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}-1\right)^n \leqslant \left(\frac{1}{a_1}-1\right)\left(\frac{1}{a_2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{a_n}-1\right)$$

另一方面，由题设及柯西不等式，可得

$$\sum_{i=1}^{n}(1-a_i)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i+a_{i+1}}-n \geqslant \frac{n^2}{\sum_{i=1}^{n}(a_i+a_{i+1})}-n=$$

$$\frac{n^2}{a_{n+1}-a_1+2\sum_{i=1}^{n}a_i}-n \geqslant$$

$$\frac{n^2}{2\sum_{i=1}^{n}a_i}-n=n\left[\frac{n}{2\sum_{i=1}^{n}a_i}-1\right]$$

所以 $$\frac{\sum_{i=1}^{n}(1-a_i)}{\sum_{i=1}^{n}a_i} \geqslant \frac{n}{\sum_{i=1}^{n}a_i}\left[\frac{n}{2\sum_{i=1}^{n}a_i}-1\right]$$

故 $$\left(\frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}\right)^n\left(\frac{n}{2(a_1+a_2+\cdots+a_n)}-1\right)^n \leqslant$$

$$\left(\frac{(1-a_1)+(1-a_2)+\cdots+(1-a_n)}{a_1+a_2+\cdots+a_n}\right)^n \leqslant$$

$$\left(\frac{1}{a_1}-1\right)\left(\frac{1}{a_2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{a_n}-1\right)$$

从而原命题得证.

6 设 X 是一个 56 元集合. 求最小的正整数 n，使得对 X 的任意 15 个子集，只要它们中任何 7 个的并的元素个数都不少于 n，则这 15 个子集中一定存在 3 个，它们的交非空.

解 n 的最小值为 41.

首先证明 $n=41$ 合乎条件. 用反证法. 假定存在 X 的 15 个子集，它们中任何 7 个的并不少于 41 个元素，而任何 3 个的交都为空集. 因每个元素至多属于 2 个子集，不妨设每个元素恰好属于 2 个子集(否则在一些子集中添加一些元素，上述条件仍然成立)，由抽屉原理，必有一个子集，设为 A，至少含有 $\left[\frac{2\times 56}{15}\right]+1=8$ 个元素，又设其他 14 个子集为 $A_1, A_2, \cdots, A_{14}$. 考察不含 A 的任何 7 个子集，都对应 X 中的 41 个元素，所有不含 A 的 7 元子集组一共至少对应 $41C_{14}^{7}$ 个元素. 另一方面，对于元素 a，若 $a \notin A$，则 $A_1, A_2, \cdots, A_{14}$ 中有 2 个含有 a，于是 a 被计算了 $C_{14}^{7}-C_{12}^{7}$ 次；若 $a \in A$，则 $A_1, A_2, \cdots, A_{14}$ 中有一个含有 a，于是 a 被计算了 $C_{14}^{7}-C_{13}^{7}$ 次，于是

$$41C_{14}^7 \leqslant (56-|A|)(C_{14}^7-C_{12}^7)+|A|(C_{14}^7-C_{13}^7)=$$
$$56(C_{14}^7-C_{12}^7)-|A|(C_{13}^7-C_{12}^7)\leqslant$$
$$56(C_{14}^7-C_{12}^7)-8(C_{13}^7-C_{12}^7)$$

由此可得 $196 \leqslant 195$,矛盾.

其次证明 $n \geqslant 41$.

用反证法.假定 $n \leqslant 40$,设 $X=\{1,2,\cdots,56\}$,令

$$A_i=\{i,i+7,i+14,i+21,i+28,i+35,i+42,i+49\}$$
$$i=1,2,\cdots,7$$
$$B_j=\{j,j+8,j+16,j+24,j+32,j+40,j+48\}$$
$$j=1,2,\cdots,8$$

显然

$$|A_i|=8,i=1,2,\cdots,7$$
$$|A_i\cap A_j|=0,1\leqslant i<j\leqslant 7$$
$$|B_j|=7,j=1,2,\cdots,8$$
$$|B_i\cap B_j|=0,1\leqslant i<j\leqslant 8$$
$$|A_i\cap B_j|=1,1\leqslant i\leqslant 7,1\leqslant j\leqslant 8$$

于是,对其中任何 3 个子集,必有 2 个同时为 A_i,或者同时为 B_j,其交为空集.

对其中任何 7 个子集

$$A_{i_1},A_{i_2},\cdots,A_{i_s},B_{j_1},B_{j_2},\cdots,B_{j_t}(s+t=7)$$

有

$$|A_{i_1}\cup A_{i_2}\cup\cdots\cup A_{i_s}\cup B_{j_1}\cup B_{j_2}\cup\cdots\cup B_{j_t}|=$$
$$|A_{i_1}|+|A_{i_2}|+\cdots+|A_{i_s}|+|B_{j_1}|+|B_{j_2}|+\cdots+|B_{j_t}|-st=$$
$$8s+7t-st=8s+7(7-s)-s(7-s)=$$
$$(s-3)^2+40\geqslant 40$$

任何 3 个子集的交为空集,所以 $n\geqslant 41$.

综上所述,n 的最小值为 41.

第22届中国数学奥林匹克

温州,2007

1 设 a,b,c 是给定复数,记 $|a+b|=m$, $|a-b|=n$. 已知 $mn\neq 0$,求证:

$$\max\{|ac+b|,|a+bc|\}\geqslant \frac{mn}{\sqrt{m^2+n^2}}$$

证法1 因为

$$\max\{|ac+b|,|a+bc|\}\geqslant$$
$$\frac{|b|\cdot|ac+b|+|a|\cdot|a+bc|}{|b|+|a|}\geqslant$$
$$\frac{|b(ac+b)-a(a+bc)|}{|a|+|b|}=\frac{|b^2-a^2|}{|a|+|b|}\geqslant$$
$$\frac{|b+a|\cdot|b-a|}{\sqrt{2(|a|^2+|b|^2)}}$$

又 $m^2+n^2=|a-b|^2+|a+b|^2=2(|a|^2+|b|^2)$

所以 $$\max\{|ac+b|,|a+bc|\}\geqslant \frac{mn}{\sqrt{m^2+n^2}}$$

证法2 注意到

$$ac+b=\frac{1+c}{2}(a+b)-\frac{1-c}{2}(a-b)$$
$$a+bc=\frac{1+c}{2}(a+b)+\frac{1-c}{2}(a-b)$$

令 $$\alpha=\frac{1+c}{2}(a+b),\beta=\frac{1-c}{2}(a-b)$$

则 $$|ac+b|^2+|a+bc|^2=|\alpha-\beta|^2+|\alpha+\beta|^2=2(|\alpha|^2+|\beta|^2)$$

所以

$$(\max\{|ac+b|,|a+bc|\})^2\geqslant|\alpha|^2+|\beta|^2=\left|\frac{1+c}{2}\right|^2m^2+\left|\frac{1-c}{2}\right|^2n^2$$

因此只须要证明

$$\left|\frac{1+c}{2}\right|^2 m^2+\left|\frac{1-c}{2}\right|^2 n^2 \geqslant \frac{m^2n^2}{m^2+n^2}$$

等价变形为

$$\left|\frac{1+c}{2}\right|^2 m^4+\left|\frac{1-c}{2}\right|^2 n^4+\left(\left|\frac{1+c}{2}\right|^2+\left|\frac{1-c}{2}\right|^2\right)m^2n^2 \geqslant m^2n^2 \quad ①$$

事实上

$$\left|\frac{1+c}{2}\right|^2 m^4+\left|\frac{1-c}{2}\right|^2 n^4+\left(\left|\frac{1+c}{2}\right|^2+\left|\frac{1-c}{2}\right|^2\right)m^2n^2 \geqslant$$

$$2\left|\frac{1+c}{2}\right|\left|\frac{1-c}{2}\right|m^2n^2+\left(\left|\frac{1+2c+c^2}{4}\right|+\left|\frac{1-2c+c^2}{4}\right|\right)m^2n^2=$$

$$\left(\left|\frac{1-c^2}{2}\right|+\left|\frac{1+2c+c^2}{4}\right|+\left|\frac{1-2c+c^2}{4}\right|\right)m^2n^2 \geqslant$$

$$\left|\frac{1-c^2}{2}+\frac{1+2c+c^2}{4}+\frac{1-2c+c^2}{4}\right|m^2n^2=m^2n^2$$

故 ① 得证.

证法 3 由已知得

$$m^2=|a+b|^2=(a+b)(\overline{a+b})=(a+b)(\overline{a}+\overline{b})=$$
$$|a|^2+|b|^2+a\overline{b}+\overline{a}b$$

$$n^2=|a-b|^2=(a-b)(\overline{a-b})=(a-b)(\overline{a}-\overline{b})=$$
$$|a|^2+|b|^2-a\overline{b}-\overline{a}b$$

从而 $|a|^2+|b|^2=\frac{m^2+n^2}{2}, a\overline{b}+\overline{a}b=\frac{m^2-n^2}{2}$

令 $c=x+yi, x, y\in\mathbf{R}$

则

$$|ac+b|^2+|a+bc|^2=$$
$$(ac+b)(\overline{ac+b})+(a+bc)(\overline{a+bc})=$$
$$|a|^2|c|^2+|b|^2+a\overline{b}c+\overline{a}b\overline{c}+|a|^2+$$
$$|b|^2|c|^2+\overline{a}bc+a\overline{b}\overline{c}=$$
$$(|c|^2+1)(|a|^2+|b|a^2)+(c+\overline{c})(a\overline{b}+\overline{a}b)=$$
$$(x^2+y^2+1)\frac{m^2+n^2}{2}+2x\frac{m^2-n^2}{2}\geqslant$$
$$\frac{m^2+n^2}{2}x^2+(m^2-n^2)x+\frac{m^2+n^2}{2}=$$
$$\frac{m^2+n^2}{2}\left(x+\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}\right)^2-\frac{m^2+n^2}{2}\left(\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}\right)^2+\frac{m^2+n^2}{2}\geqslant$$
$$\frac{m^2+n^2}{2}-\frac{1}{2}\frac{(m^2-n^2)^2}{m^2+n^2}=\frac{2m^2n^2}{m^2+n^2}$$

所以 $(\max\{|ac+b|, |a+bc|\})^2\geqslant\frac{m^2n^2}{m^2+n^2}$

即 $$\max\{|ac+b|,|a+bc|\} \geqslant \frac{mn}{\sqrt{m^2+n^2}}$$

2 试证明:(1) 若 $2n-1$ 为素数,则对于任意 n 个互不相同的正整数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$,都存在 $i,j\in\{1,2,\cdots,n\}$,使得

$$\frac{a_i+a_j}{(a_i,a_j)} \geqslant 2n-1$$

(2) 若 $2n-1$ 为合数,则存在 n 个互不相同的正整数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$,使得对任意 $i,j\in\{1,2,\cdots,n\}$,都有

$$\frac{a_i+a_j}{(a_i,a_j)} < 2n-1$$

其中,(x,y) 表示正整数 x,y 的最大公约数.

证明 (1) 记 $2n-1$ 为素数 p,不妨设 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)=1$.若存在 $i(1\leqslant i\leqslant n)$,使得 $p\mid a_i$.必然存在 $j\neq i$ 使得 $p\nmid a_j$.由于 $p\nmid (a_i,a_j)$,则有

$$\frac{a_i+a_j}{(a_i,a_j)} \geqslant \frac{a_i}{(a_i,a_j)} \geqslant p = 2n-1$$

以下只须要考虑 $(a_i,p)=1,i=1,2,\cdots,n$,则对任意 $i\neq j$ 都是 $p\nmid (a_i,a_j)$.将 $1,2,\cdots,p-1$ 分成 $n-1$ 类:$\{1,p-1\}$,$\{2,p-2\},\cdots,\{n-1,n\}$.由抽屉原理可知存在 $i\neq j$,使得 $a_i\equiv a_j \pmod p$ 或者 $a_i+a_j\equiv 0\pmod p$.

当 $a_i\equiv a_j\pmod p$ 时

$$\frac{a_i+a_j}{(a_i,a_j)} > \frac{a_i-a_j}{(a_i,a_j)} \geqslant p = 2n-1$$

当 $a_i+a_j\equiv 0\pmod p$ 时

$$\frac{a_i+a_j}{(a_i,a_j)} \geqslant p = 2n-1$$

故(1)得证.

(2) 以下我们来构造命题存在性的例子.由于 $2n-1$ 为合数,则存在两个大于 1 的正整数 p,q 使得 $2n-1=pq$.可以构造如下 n 个数

$$a_1=1,a_2=2,\cdots,a_p=p,a_{p+1}=p+1$$
$$a_{p+2}=p+3,\cdots,a_n=pq-p$$

其中前面为 p 个连续的整数,从 $p+1$ 至 $pq-p$ 为 $n-p$ 个连续的偶数.

当 $1\leqslant i\leqslant j\leqslant p$ 时,显然有

$$\frac{a_i+a_j}{(a_i,a_j)} \leqslant a_i+a_j \leqslant 2p < 2n-1$$

当 $p+1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$ 时,因为 $2 \mid (a_i,a_j)$,所以有

$$\frac{a_i+a_j}{(a_i,a_j)} \leqslant \frac{a_i+a_j}{2} \leqslant pq-p < 2n-1$$

当 $1 \leqslant i \leqslant p, p+1 \leqslant j \leqslant n$ 时,分两种情况:

i 当 $i \neq p$ 或 $j \neq n$ 时,显然有

$$\frac{a_i+a_j}{(a_i,a_j)} \leqslant pq-1 < 2n-1$$

ii 当 $i=p$ 且 $j=n$ 时,由于 $(p,pq-p)=p$,则有

$$\frac{a_p+a_n}{(a_p,a_n)} \leqslant \frac{pq}{p} \leqslant q < 2n-1$$

经过如上验证,可以看出所构造的 n 个数满足条件.

3 已知 $a_1,a_2,\cdots,a_{11}$ 为给定的11个互不相同的正整数,且总和小于2 007.在黑板上依次写着1,2,…,2 007这2 007个数.将连续的22次操作定义为一个操作组:第 i 次操作可以从黑板上现有的数中任选一个数,当 $1 \leqslant i \leqslant 11$ 时,加上 a_i 当 $12 \leqslant i \leqslant 22$ 时,减去 a_{i-11}.如果最终结果为1,2,…,2 007的偶排列[①],则称这个操作组为优的;如果最终结果为1,2,…,2 007的奇排列,则称这个操作组为次优的.问优的操作组与次优的操作组哪种多,多多少?

解 优的操作组更多,多了 $\prod_{i=1}^{11} a_i$ 个.

我们引入一般的记号:如果黑板上写着 $1,2,\cdots,n$ 这 n 个数,一个操作组被定义为 l 次连续操作:第 i 次操作可以从黑板上现有的数中任选出一个,加上 b_i,这里 $b_i \in \mathbf{Z}(1 \leqslant i \leqslant l)$.如果最终结果为 $1,2,\cdots,n$ 的偶(奇)排列,则称这操作组为优(次优)的,优的操作组的数目与次优的操作组的数目之差记为 $f(b_1,b_2,\cdots,b_l;n)$.以下先来讨论 f 的性质.

首先,对任意 $1 \leqslant i,j \leqslant l$,交换 b_i 与 b_j 的取值不会影响 f.事实上,只须要将操作组的第 i 次与第 j 次操作对调;换言之,第 i 次操作时进行原来的第 j 次操作,把原来计划进行的第 j 次操作选定的数加上 b_j,而第 j 次操作时进行原来的第 i 次操作.对调后操作组的结果不变,因而优(次优)操作组的数目不变,故 f 不变.

---

① $1,2,\cdots,n$ 的一个排列 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 称为偶排列,如果 $\prod_{i>j}(x_i-x_j)$ 为正数,否则称为奇排列.

其次,我们只须要计算这样的优的(次优的)操作组的数目:

每一步操作后,黑板上没有任何两个数相同,这样的操作组称为具有性质 P 的操作组.可以证明,具有性质 P 的优的操作组数目与次优的操作组数目之差也等于 $f(b_1,b_2,\cdots,b_l;n)$.

事实上,只要证明,在不具有性质 P 的操作组中,优的操作组与次优的操作组一样多.如果一个操作组最先第 i 步操作导致黑板上出现两个相等的数,例如第 p 个数和第 q 个数相等($1\leqslant p<q\leqslant n$),那么对该操作组的后 $l-i$ 步操作进行如下的改动:对第 p 个数的操作改成对第 q 个数进行,对第 q 个数的操作改成对第 p 个数进行,那么这个新的操作组最终显示的结果将是在原操作组的结果上对第 p,q 个数进行了对换,不难发现,对换一个排列中任何两个数都会导致排列的奇偶性改变.所以,优的操作组通过上述改动可以和次优的操作组构成一一对应,因而不具备性质 P 的操作组中,优的与次优的一样多.

现在我们对 m 用数学归纳法证明如下的结果:

$a_1,a_2,\cdots,a_m$ 为 m 个互不相同的正整数且总和小于 n,则

$$f(a_1,a_2,\cdots,a_m,-a_1,-a_2,\cdots,-a_m;n)=\prod_{j=1}^{m}a_j \quad ①$$

当 $m=1$ 时,考虑具有性质 P 的优的和次优的操作组,必然是从后 a_1 个数中选上某个数加上 a_1,然后再将这个数加上 $-a_1$(否则得不到 $1,2,\cdots,n$ 的排列),所以优的操作组有 a_1 个,次优的操作组有 0 个,故 ① 成立.

假设 $m-1$ 时命题成立.考虑 m 时的命题.不妨设 $a_1<a_2<\cdots<a_n$.根据前面的讨论

$$f(a_1,a_2,\cdots,a_m,-a_1,-a_2,\cdots,-a_m;n)=$$
$$f(a_1,-a_2,-a_3,\cdots,-a_m,a_2,a_3,\cdots,a_m,-a_1;n)$$

这时对于具有性质 P 的优的和次优的操作组来说,第 1 步操作可以从末 a_1 个数中选取某数加上 a_1,而第 2 步操作只能对前 a_2 个数进行,第 3 步操作只能对前 a_2+a_3 个数进行,$\cdots$,第 m 步操作只能对前 $a_2+\cdots+a_m<n-a_1$ 个数进行,而第 $m+1\sim 2m-1$ 步操作也只能对前 $n-a_1$ 个数进行,否则前 $n-a_1$ 个数最终的和小于 $1+2+\cdots+(n-a_1)$,操作组结束后黑板上的 n 个数不为 $1,2,\cdots,n$ 的排列,第 $2m$ 步操作只能对第 1 步操作时选定的数进行.

因此,第 $2\sim 2m-2$ 步操作必然是对前 $n-a_1$ 个数进行,它的结果也要得到 $1,2,\cdots,n-a_1$ 的偶(奇)排列,才能使总共 $2m$ 步操作的结果得到 $1,2,\cdots,n$ 的偶(奇)排列.所以,中间 $2m-2$ 步操作构成的对 $n-a_1$ 个数进行的每个具有性质 P 的优(次优)的操作组都可以对应 a_1 个原来的具有性质 P 的优(次优)的操作组,

于是

$$f(a_1, -a_2, -a_3, \cdots, -a_m, a_2, a_3, \cdots, a_m, -a_1; n) =$$
$$a_1 \cdot f(-a_2, -a_3, \cdots, -a_m, a_2, a_3, \cdots, a_m; n - a_1)$$

根据归纳假设

$$f(-a_2, -a_3, \cdots, -a_m, a_2, a_3, \cdots, a_m; n - a_1) =$$
$$f(a_2, a_3, \cdots, a_m, -a_2, -a_3, \cdots, -a_m; n - a_1) = \prod_{j=2}^{m} a_j$$

故 ① 在 m 时亦成立.

所以由归纳法,① 得证.

在 ① 中取 $n = 2\,007, m = 11$,即得到本题的答案 $\prod_{j=1}^{11} a_j$.

4 设 O 和 I 分别为 $\triangle ABC$ 的外心和内心,$\triangle ABC$ 的内切圆与边 BC, CA, AB 分别相切于点 D, E, F,直线 FD 与 CA 相交于点 P,直线 DE 与 AB 相交于点 Q,点 M, N 分别为线段 PE, QF 的中点,求证:$OI \perp MN$.

证明 考虑 $\triangle ABC$ 与截线 PFD,由梅涅劳斯定理,有

$$\frac{CP}{PA} \cdot \frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} = 1$$

所以
$$\frac{PA}{PC} = \frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} = \frac{AF}{DC} = \frac{p-a}{p-c}$$

于是
$$\frac{PA}{CA} = \frac{p-a}{a-c}$$

因此
$$PA = \frac{b(p-a)}{a-c}$$

这样

$$PE = PA + AE = \frac{b(p-a)}{a-c} + p - a = \frac{2(p-c)(p-a)}{a-c}$$
$$ME = \frac{1}{2}PE = \frac{(p-c)(p-a)}{a-c}$$
$$MA = ME - AE = \frac{(p-c)(p-a)}{a-c} - (p-a) = \frac{(p-a)^2}{a-c}$$
$$MC = ME + EC = \frac{(p-c)(p-a)}{a-c} + (p-c) = \frac{(p-c)^2}{a-c}$$

于是
$$MA \cdot MC = ME^2$$

因为 ME 是点 M 到 $\triangle ABC$ 的内切圆的切线长,所以 ME^2 是点 M 到内切圆的幂,而 $MA \cdot MC$ 是点 M 到 $\triangle ABC$ 的外接圆的幂,等式 $MA \cdot MC = ME^2$ 表明点 M 到 $\triangle ABC$ 的外接圆与内切圆的幂相等,因而点 M 在 $\triangle ABC$ 的外接圆与内切圆的根轴上.同理,点 N 也在 $\triangle ABC$ 的外接圆与内切圆的根轴上.故 $OI \perp MN$.

5 设有界数列$\{a_n\}_{n\geqslant 1}$满足

$$a_n < \sum_{k=n}^{2n+2\,006} \frac{a_k}{k+1} + \frac{1}{2n+2\,007}, n = 1,2,3,\cdots$$

证明：

$$a_n < \frac{1}{n}, n = 1,2,3,\cdots$$

证明 设 $b_n = a_n - \frac{1}{n}$，则

$$b_n < \sum_{k=n}^{2n+2\,006} \frac{b_k}{k+1}, n \geqslant 1 \quad ①$$

下证 $b_n < 0$. 因为 a_n 有界，故存在常数 M，使得 $b_n < M$. 当 $n > 100\,000$ 时，我们有

$$b_n < \sum_{k=n}^{2n+2\,006} \frac{b_k}{k+1} < M \sum_{k=n}^{2n+2\,006} \frac{1}{k+1} =$$

$$M \sum_{k=n}^{[\frac{3n}{2}]} \frac{1}{k+1} + M \sum_{k=[\frac{3n}{2}]+1}^{2n+2\,006} \frac{1}{k+1} <$$

$$M \cdot \frac{1}{2} + M \cdot \frac{\frac{n}{2} + 2\,006}{\frac{3n}{2} + 1} < \frac{6}{7}M$$

由此可以得到，对任意的正整数 m 有

$$b_n < \left(\frac{6}{7}\right)^m M$$

于是有

$$b_n \leqslant 0, n \geqslant 100\,000$$

将其代入①，得

$$b_n < 0, n \geqslant 100\,000$$

再次利用①，可以得：如果当 $n \geqslant N+1$ 时 $b_n < 0$，则 $b_N < 0$，这就推出

$$b_n < 0, n = 1,2,3,\cdots$$

即

$$a_n < \frac{1}{n}, n = 1,2,3,\cdots$$

6 试求不小于 9 的最小正整数 n，满足对任给的 n 个整数（可以相同）$a_1, a_2, \cdots, a_n$，总存在 9 个数 $a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_9}$ $(1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_9 \leqslant n)$ 及 $b_i \in \{4,7\}$ $(i = 1,2,\cdots,9)$，使得 $b_1 a_{i_1} + b_2 a_{i_2} + \cdots + b_9 a_{i_9}$ 为 9 的倍数.

解 取 $a_1 = a_2 = 1, a_3 = a_4 = 3, a_5 = \cdots = a_{12} = 0$，则其中任 9 个数均不满足要求，因此 $n \geqslant 13$. 下证 $n = 13$ 可以. 为此，只要证明如果 m 个整数（可能相同）$a_1, a_2, \cdots, a_m$ 中，不存在 3 个

数 a_{i_1},a_{i_2},a_{i_3} 及 $b_1,b_2,b_3\in\{4,7\}$，使得 $b_1a_{i_1}+b_2a_{i_2}+b_3a_{i_3}$ 为 9 的倍数，则 $m\leqslant 6$ 或者 $7\leqslant m\leqslant 8$ 且 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 中有 6 个 $a_{i_1},a_{i_2},\cdots,a_{i_6}$ 及 $b_1,b_2,\cdots,b_6\in\{4,7\}$ 使得

$$9\mid b_1a_{i_1}+b_2a_{i_2}+\cdots+b_6a_{i_6}$$

设

$$A_1=\{i\mid 1\leqslant i\leqslant m,9\mid a_i\}$$
$$A_2=\{i\mid 1\leqslant i\leqslant m,a_i\equiv 3(\bmod 9)\}$$
$$A_3=\{i\mid 1\leqslant i\leqslant m,a_i\equiv 6(\bmod 9)\}$$
$$A_4=\{i\mid 1\leqslant i\leqslant m,a_i\equiv 1(\bmod 3)\}$$
$$A_5=\{i\mid 1\leqslant i\leqslant m,a_i\equiv 2(\bmod 3)\}$$

则 $|A_1|+|A_2|+|A_3|+|A_4|+|A_5|=m$，且

(1) 若 $i\in A_2,j\in A_3$，且 $9\mid 4a_i+4a_j$；

(2) 若 $i\in A_4,j\in A_5$，则 9 能整除 $4a_i+4a_j,4a_i+7a_j,7a_i+4a_j$ 之一. 这是因为 $4a_i+4a_j,4a_i+7a_j,7a_i+4a_j$ 均是 3 的倍数且模 9 两两不同余；

(3) 若 $i,j,k\in A_2$ 或者 $i,j,k\in A_3$，则 $9\mid 4a_i+4a_j+4a_k$；

(4) 若 $i,j,k\in A_4$ 或者 $i,j,k\in A_5$，则 9 能整除 $4a_i+4a_j+4a_k,4a_i+4a_j+7a_k,4a_i+7a_j+7a_k$ 之一. 这是因为这三个数均是 3 的倍数且模 9 两两不同余.

由假设，有 $|A_i|\leqslant 2(1\leqslant i\leqslant 5)$.

若 $|A_1|\geqslant 1$，则

$$|A_2|+|A_3|\leqslant 2,\ |A_4|+|A_5|\leqslant 2$$

这样 $$m=|A_1|+|A_2|+|A_3|+|A_4|+|A_5|\leqslant 6$$

下设 $|A_1|=0,m\geqslant 7$，此时

$$7\leqslant m=|A_1|+|A_2|+|A_3|+|A_4|+|A_5|\leqslant 8$$

因此 $$\min\{|A_2|,|A_3|\}+\min\{|A_4|,|A_5|\}\geqslant 3$$

由(1)和(2)知存在 $i_1,i_2,\cdots,i_6\in A_2\cup A_3\cup A_4\cup A_5,i_1<i_2<\cdots<i_6$ 及 $b_1,b_2,\cdots,b_6\in\{4,7\}$ 使 $9\mid b_1a_{i_1}+b_2a_{i_2}+\cdots+b_6a_{i_6}$.

综上，所求的最小的 $n=13$.

第23届中国数学奥林匹克

哈尔滨,2008

1 设锐角 $\triangle ABC$ 的三边长互不相等,O 为其外心,点 A' 在线段 AO 的延长线上,使得 $\angle BA'A = \angle CA'A$.过 A' 作 $A'A_1 \perp AC$,$A'A_2 \perp AB$,垂足分别为 A_1, A_2,作 $AH_A \perp BC$,垂足为 H_A.记 $\triangle H_AA_1A_2$ 的外接圆半径为 R_A,类似地可得 R_B, R_C.求证:

$$\frac{1}{R_A}+\frac{1}{R_B}+\frac{1}{R_C}=\frac{2}{R}$$

其中,R 为 $\triangle ABC$ 的外接圆半径.

解 首先,易知 A', B, O, C 四点共圆.

事实上,如图1所示,作 $\triangle BOC$ 的外接圆,设其与 AO 交于点 P(不同于点 A').则

$$\angle BPA = \angle BCO = \angle CBO = \angle CPA$$

故 $\triangle PA'C \cong \triangle PA'B$,得 $A'B = A'C$,从而,$AB = AC$.矛盾.

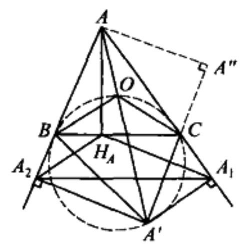


图1

其次

$$\frac{AA_2}{AA'}=\cos\angle A_2AA'=\sin C=\frac{H_AA}{AC}$$

$$\angle A_2AH_A=\frac{\pi}{2}-\angle B=\angle A'AC$$

所以 $$\triangle A_2AH_A \backsim \triangle A'AC$$

同理 $$\triangle A_1H_AA \backsim \triangle A'BA$$

故 $$\angle A_2H_AA = \angle ACA'$$

$$\angle A_1H_AA = \angle ABA'$$

则 $$\angle A_1H_AA_2 = 2\pi-\angle A_2H_AA-\angle A_1H_AA = 2\pi-\angle ACA'-\angle ABA' = \angle A+2\left(\frac{\pi}{2}-\angle A\right)=\pi-\angle A$$

所以 $$\frac{R}{R_A}=\frac{R}{\dfrac{A_1A_2}{2\sin\angle A_1H_AA_2}}=\frac{2R\sin A}{A_1A_2}=\frac{2R\sin A}{AA'\sin A}=\frac{2R}{AA'}$$

而 $$AA'=\frac{AA''}{\sin\angle AA'C}=\frac{AH_A}{\sin(90^\circ-\angle A)}=\frac{AH_A}{\cos A}=\frac{2S_{\triangle ABC}}{a\cos A}$$

其中, $AA'' \perp A'C$ 于点 A''. 故

$$\frac{1}{R_A}=\frac{a\cos A}{S_{\triangle ABC}}=\frac{\cos A}{R\sin B\sin C}=\frac{1}{R}(1-\cot B\cot C)$$

同理
$$\frac{1}{R_B}=\frac{1}{R}(1-\cot C\cot A)$$
$$\frac{1}{R_c}=\frac{1}{R}(1-\cos A\cot B)$$

注意到
$$\cot A\cot B+\cot B\cot C+\cot C\cot A=1$$

所以
$$\frac{1}{R_A}+\frac{1}{R_B}+\frac{1}{R_C}=\frac{2}{R}$$

2 给定整数 $n(n\geqslant 3)$. 证明:集合 $X=\{1,2,\cdots,n^2-n\}$ 能写成两个不相交的非空子集的并,使得每一个子集均不包含 n 个元素 $a_1,a_2,\cdots,a_n$, $a_1<a_2<\cdots<a_n$,满足

$$a_k\leqslant\frac{a_{k-1}+a_{k+1}}{2},k=2,3,\cdots,n-1$$

解 定义

$$S_k=\{k^2-k+1,\cdots,k^2\}$$
$$T_k=\{k^2+1,\cdots,k^2+k\}$$
$$k=1,2,\cdots,n-1$$

令
$$S=\bigcup_{k=1}^{n-1}S_k,T=\bigcup_{k=1}^{n-1}T_k$$

下面证明: S,T 即为满足题目要求的两个子集.

首先, $S\cap T=\varnothing$,且 $S\cup T=X$.

其次,如果 S 中存在 n 个元素 $a_1,a_2,\cdots,a_n$, $a_1<a_2<\cdots<a_n$,满足

$$a_k\leqslant\frac{a_{k-1}+a_{k+1}}{2},k=2,3,\cdots,n-1$$

则

$$a_k-a_{k-1}\leqslant a_{k+1}-a_k \qquad ①$$

不妨设 $a_1\in S_i$.

由于 $|S_{n-1}|<n$,故 $i<n-1$. 于是, $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 这 n 个数中至少有 $n-|S_i|=n-i$ 个在 $S_{i+1}\cup\cdots\cup S_{n-1}$ 中.

根据抽屉原理,必有某个 $S_j(i<j<n)$ 中含有其中至少两个数,设最小的一个为 a_k,则 $a_k,a_{k+1}\in S_j$. 而 $a_{k-1}\in S_1\cup\cdots\cup S_{j-1}$,于是

$$a_{k+1}-a_k\leqslant|S_j|-1=j-1$$

$$a_k - a_{k-1} \geqslant |T_{j-1}| + 1 = j$$

则
$$a_{k+1} - a_k < a_k - a_{k-1}$$

与式①矛盾.

故 S 中不存在 n 个元素满足题中假设.

同理, T 中也不存在这样的 n 个元素.

这表明 S, T 即为满足要求的两个子集.

3 给定正整数 n, 及实数 $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n$, $y_1 \geqslant y_2 \geqslant \cdots \geqslant y_n$, 满足

$$\sum_{i=1}^{n} ix_i \geqslant \sum_{i=1}^{n} iy_i$$

证明:对任意实数 α,有

$$\sum_{i=1}^{n} x_i[i\alpha] \geqslant \sum_{i=1}^{n} y_i[i\alpha]$$

其中, $[\beta]$ 表示不超过实数 β 的最大整数.

证明 先证明一个引理.

引理:对任意实数 α 和正整数 n,有

$$\sum_{i=1}^{n-1}[i\alpha] \leqslant \frac{n-1}{2}[n\alpha]$$

引理的证明:只须将 $[i\alpha] + [(n-i)\alpha] \leqslant [n\alpha]$ 对 $i = 1, 2, \cdots, n-1$ 求和即得.

回到原理.

采用归纳法对 n 进行归纳.

当 $n = 1$ 时,显然.

假设 $n = k$ 时,原命题成立,考虑 $n = k + 1$.

令 $a_i = x_i + \frac{2}{k}x_{k+1}$, $b_i = y_i + \frac{2}{k}y_{k+1}$ $(i = 1, 2, \cdots, k)$. 显然, $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_k$, $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \cdots \geqslant b_k$, 且通过计算知 $\sum_{i=1}^{k} ia_i = \sum_{i=1}^{k} ib_i$.

由归纳假设知 $\sum_{i=1}^{k} a_i[i\alpha] \geqslant \sum_{i=1}^{k} b_i[i\alpha]$.

又 $x_{k+1} \geqslant y_{k+1}$, 否则, 若 $x_{k+1} < y_{k+1}$, 则 $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_{k+1} < y_{k+1} \leqslant \cdots \leqslant y_2 \leqslant y_1$, $\sum_{i=1}^{k+1} ix_i = \sum_{i=1}^{k+1} iy_i$, 矛盾. 从而

$$\sum_{i=1}^{k+1} x_i[i\alpha] - \sum_{i=1}^{k} a_i[i\alpha] = x_{k+1}\left([(k+1)\alpha] - \frac{2}{k}\sum_{i=1}^{k}[i\alpha]\right) \geqslant$$

$$y_{k+1}\left([(k+1)\alpha]-\frac{2}{k}\sum_{i=1}^{k}[i\alpha]\right)=$$
$$\sum_{i=1}^{k+1}y_i[i\alpha]-\sum_{i=1}^{k}b_i[i\alpha]$$

由此,得
$$\sum_{i=1}^{k+1}x_i[i\alpha]\geqslant\sum_{i=1}^{k+1}y_i[i\alpha]$$

由归纳法知原命题对任意正整数 n 均成立.

4 设 A 是正整数集的无限子集,$n(n>1)$ 是给定的整数.已知对任意一个不整除 n 的质数p,集合 A 中均有无穷多个元素不被 p 整除.证明:对任意整数 $m(m>1)$,$(m,n)=1$,集合 A 中均存在有限个互不相同的元素,其和 S 满足 $S\equiv 1(\bmod m)$,且 $S\equiv 0(\bmod n)$.

解 设 $p^{\alpha}\parallel m$,则集合 A 中有一个无穷子集A_1,其中的元素都不被 p 整除.

由抽屉原理知,集合 A_1 有一个无穷子集 A_2,其中的元素恒关于 mn 模 a,a 是一个不被p 整除的数.

因为$(m,n)=1$,所以,$\left(p^{\alpha},\dfrac{mn}{p^{\alpha}}\right)=1$.

由中国剩余定理,同余方程组

$$\begin{cases}x\equiv a^{-1}(\bmod p^{\alpha})\\ x\equiv 0\left(\bmod \dfrac{mn}{p^{\alpha}}\right)\end{cases} \quad ①$$

有无穷多个整数解.任取其中一个正整数解 x,并记 B_p 是A_2 中前 x 项的集合,则 B_p 中的元素之和$S_p\equiv ax(\bmod mn)$.

再由方程组 ① 可知

$$S_p\equiv ax\equiv 1(\bmod p^{\alpha}),S_p\equiv 0\left(\bmod \frac{mn}{p^{\alpha}}\right)$$

设 $m=p_1^{\alpha_1}\cdots p_k^{\alpha_k}$,并设对每个 $p_i(1\leqslant i\leqslant k-1)$ 已选出了 A 的有限子集 B_i,其中,$B_i\subset A\setminus B_1\cup\cdots\cup B_{i-1}$,使 B_i 中的元素和 S_{p_i} 满足

$$S_{p_i}\equiv 1(\bmod p_i^{\alpha_i}),S_{p_i}\equiv 0\left(\bmod \frac{mn}{p_i^{\alpha_i}}\right) \quad ②$$

考虑集合 $B=\bigcup\limits_{i=1}^{k}B_i$,则 B 的元素和$S=\sum\limits_{i=1}^{k}S_i$.

根据式②,有 $S\equiv 1(\bmod p_i^{\alpha_i})(1\leqslant i\leqslant k)$,且 $S\equiv 0(\bmod n)$.

所以,B 即满足题目要求.

5 求具有如下性质的最小正整数 n:将正 n 边形的每一个顶点任意染上红、黄、蓝三种颜色之一,那么,这 n 个顶点中一定存在四个同色点,它们是一个等腰梯形的顶点(两条边平行,另两条边不平行且相等的凸四边形称为等腰梯形).

解 所求 n 的最小值为 17.

首先证明:$n = 17$ 时,结论成立.

用反证法.

假设存在一种将正 17 边形的顶点三染色的方法,使得不存在 4 个同色顶点是某个等腰梯形的顶点.

由于$\left[\frac{17-1}{3}\right]+1=6$,故必存在某6个顶点染同一种颜色,不妨设为黄色.将这6个点两两连线,可以得到 $C_6^2 = 15$ 条线段.由于这些线段的长度只有$\left[\frac{17}{2}\right] = 8$ 种可能,于是,必出现如下的两种情形之一.

i 有某三条线段长度相同.

注意到 $3 \nmid 17$,不可能出现这三条线段两两有公共顶点的情况.所以,存在两条线段,顶点互不相同.这两条线段的 4 个顶点即满足题目要求,矛盾.

ii 有 7 对长度相等的线段.

由假设,每对长度相等的线段必有公共的黄色顶点,否则,能找到满足题目要求的 4 个黄色顶点.再根据抽屉原理,必有两对线段的公共顶点是同一个黄色点.这四条线段的另 4 个顶点必然是某个等腰梯形的顶点,矛盾.

所以,$n = 17$ 时,结论成立.

再对 $n \leqslant 16$ 构造出不满足题目要求的染色方法.用 A_1,$A_2,\cdots,A_n$ 表示正 n 边形的顶点(按顺时针方向),M_1,M_2,M_3 分别表示三种颜色的顶点集.

当 $n = 16$ 时,令

$$M_1 = \{A_5,A_8,A_{13},A_{14},A_{16}\}$$

$$M_2 = \{A_3,A_6,A_7,A_{11},A_{15}\}$$

$$M_3 = \{A_1,A_2,A_4,A_9,A_{10},A_{12}\}$$

对于 M_1,A_{14} 到另 4 个顶点的距离互不相同,而另 4 个点刚好是一个矩形的顶点,类似于 M_1,可验证 M_2 中不存在 4 个顶点是某个等腰梯形的顶点.对于 M_3,其中 6 个顶点刚好是 3 条直径的顶点,所以,任意 4 个顶点要么是某个矩形的 4 个顶点,要么是某个不等边四边形的 4 个顶点.

当 $n=15$ 时,令

$$M_1=\{A_1,A_2,A_3,A_5,A_8\}$$
$$M_2=\{A_6,A_9,A_{13},A_{14},A_{15}\}$$
$$M_3=\{A_4,A_7,A_{10},A_{11},A_{12}\}$$

每个 M_i 中均无 4 点是等腰梯形的顶点.

当 $n=14$ 时,令

$$M_1=\{A_1,A_3,A_8,A_{10},A_{14}\}$$
$$M_2=\{A_4,A_5,A_7,A_{11},A_{12}\}$$
$$M_3=\{A_2,A_6,A_9,A_{13}\}$$

每个 M_i 中均无 4 点是等腰梯形的顶点.

当 $n=13$ 时,令

$$M_1=\{A_5,A_6,A_7,A_{10}\}$$
$$M_2=\{A_1,A_8,A_{11},A_{12}\}$$
$$M_3=\{A_2,A_3,A_4,A_9,A_{13}\}$$

每个 M_i 中均无 4 点是等腰梯形的顶点.

在上述情形中去掉顶点 A_{13},染色方式不变,即得到 $n=12$ 的染色方法;然后,再去掉顶点 A_{12},即得到 $n=11$ 的染色方法;继续去掉顶点 A_{11},得到 $n=10$ 的染色方法.

当 $n\leqslant 9$ 时,可以使每种颜色的顶点个数小于 4,从而,无 4 个同色顶点是某个等腰梯形的顶点.

上面构造的例子表明 $n\leqslant 16$ 不具备题目要求的性质.

综上所述,所求的 n 的最小值为 17.

6 试确定所有同时满足

$$q^{n+2}\equiv 3^{n+2}\pmod{p^n},\ p^{n+2}\equiv 3^{n+2}\pmod{q^n}$$

的三元数组 (p,q,n),其中,p,q 为奇质数,n 为大于 1 的整数.

解 易见 $(3,3,n)(n=2,3,\cdots)$ 均为满足要求的数组.

假设 (p,q,n) 为其他满足要求的一数组,则 $p\neq q,p\neq 3,q\neq 3$. 不妨设 $q>p\geqslant 5$. 如果 $n=2$,则 $q^2\mid(p^4-3^4)$,即

$$q^2\mid(p^2-3^2)(p^2+3^2)$$

由于 q 不同时整除 p^2-3^2 和 p^2+3^2,故

$$q^2\mid(p^2-3^2)\text{ 或 }q^2\mid(p^2+3^2)$$

但 $$0<p^2-3^2<q^2,\frac{1}{2}(p^2+3^2)<p^2<q^2$$

矛盾.

因此,$n\geqslant 3$.

由 $p^n\mid(q^{n+2}-3^{n+2}),q^n\mid(p^{n+2}-3^{n+2})$,知

$$p^n \mid (p^{n+2}+q^{n+2}-3^{n+2}), q^n(p^{n+2}+q^{n+2}-3^{n+2})$$

又 $p<q$（p,q 为质数），故

$$p^nq^n \mid (p^{n+2}+q^{n+2}-3^{n+2}) \qquad ①$$

因此 $$p^nq^n \leqslant p^{n+2}+q^{n+2}-3^{n+2}<2q^{n+2}$$

从而 $$p^n<2q^2$$

由 $q^n \mid (p^{n+2}-3^{n+2})$ 及 $p>3$，知

$$q^n \leqslant p^{n+2}-3^{n+2}<p^{n+2}$$

从而 $$q<p^{1+\frac{2}{n}}$$

结合 $p^n<2q^2$，有

$$p^n<2p^{2+\frac{4}{n}}<p^{3+\frac{4}{n}}$$

因此，$n<3+\frac{4}{n}$，故 $n=3$. 这样

$$p^3 \mid (q^5-3^5), q^3 \mid (p^5-3^5)$$

且由 $5^5-3^5=2\times 11\times 131$，易知 $p>5$.

由 $p^3 \mid (q^5-3^5)$，知 $p \mid (q^5-3^5)$.

由费马小定理知 $p \mid (q^{p-1}-3^{p-1})$. 因此

$$p \mid (q^{(5,p-1)}-3^{(5,p-1)})$$

如果 $(5,p-1)=1$，则 $p \mid (q-3)$. 由

$$\frac{q^5-3^5}{q-3}=q^4+q^3\times 3+q^2\times 3^2+q\times 3^3+3^4 \equiv 5\times 3^4 \pmod p$$

以及 $p>5$，知

$$p \nmid \frac{q^5-3^5}{q-3}$$

因此 $$p^3 \mid (q-3)$$

由 $q^3 \mid (p^5-3^5)$ 知

$$q^3 \leqslant p^5-3^5<p^5=(p^3)^{\frac{5}{3}}<q^{\frac{5}{3}}$$

矛盾.

所以，$(5,p-1)\neq 1$，即 $5 \mid (p-1)$.

类似可得 $5 \mid (q-1)$.

由 $q \nmid (p-3)$（因 $q>p\geqslant 7$）及 $q^3 \mid (p^5-3^5)$，知

$$q^3 \left| \frac{p^5-3^5}{p-3} \right.$$

故 $$q^3 \leqslant \frac{p^5-3^5}{p-3}=p^4+p^3\times 3+p^2\times 3^2+p\times 3^3+3^4$$

由 $5 \mid (p-1)$ 及 $5 \mid (q-1)$，知 $p\geqslant 11, q\geqslant 31$，则

$$q^3 \leqslant p^4\left(1+\frac{3}{p}+\left(\frac{3}{p}\right)^2+\left(\frac{3}{p}\right)^3+\left(\frac{3}{p}\right)^4\right)<$$

$$p^4 \cdot \frac{1}{1-\frac{3}{p}} \leqslant \frac{11}{8}p^4$$

从而
$$p > \left(\frac{8}{11}\right)^{\frac{1}{4}} q^{\frac{3}{4}}$$

故
$$\frac{p^5+q^5-3^5}{p^3q^3} < \frac{p^2}{q^3}+\frac{q^2}{p^3} < \frac{1}{q}+\left(\frac{11}{8}\right)^{\frac{3}{4}}\frac{1}{31^{\frac{1}{4}}} < 1$$

这与式①,即 $p^3q^3 \mid (p^5+q^5-3^5)$ 矛盾.

综上,$(3,3,n)(n=2,3,\cdots)$ 即为所有满足要求的三元数组.

第 24 届中国数学奥林匹克

琼海,2009

1 给定锐角 $\triangle PBC$, $PB \neq PC$. 设 A, D 分别是边 PB, PC 上的点,联结 AC, BD, 相交于 O. 过点 O 分别作 $OE \perp AB$, $OF \perp CD$, 垂足分别为 E, F, 线段 BC, AD 的中点分别为 M, N.

(1) 若 A, B, C, D 四点共圆,求证: $EM \cdot FN = EN \cdot FM$;

(2) 若 $EM \cdot FN = EN \cdot FM$, 是否一定有 A, B, C, D 四点共圆?证明你的结论.

解 (1) 设 Q, R 分别是 OB, OC 的中点,联结 EQ, MQ, FR, MR, 则

$$EQ = \frac{1}{2}OB = RM, MQ = \frac{1}{2}OC = RF$$

又 $OQMR$ 是平行四边形,所以

$$\angle OQM = \angle ORM$$

由题设 A, B, C, D 四点共圆,所以

$$\angle ABD = \angle ACD$$

于是 $$\angle EQO = 2\angle ABD = 2\angle ACD = \angle FRO$$

所以

$$\angle EQM = \angle EQO + \angle OQM = \angle FRO + \angle ORM = \angle FRM$$

故 $$\triangle EQM \cong \triangle MRF$$

所以 $$EM = FM$$

同理可得 $$EN = FN$$

所以 $$EM \cdot FN = EN \cdot FM$$

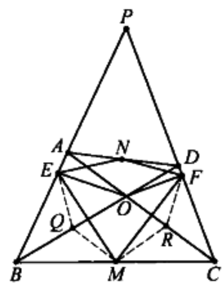


图 1

(2) 答案是否定的.

当 $AD \parallel BC$ 时,由于 $\angle B \neq \angle C$, 所以 A, B, C, D 四点不共圆,但此时仍然有 $EM \cdot FN = EN \cdot FM$, 证明如下:

如图 2, 设 S, Q 分别是 OA, OB 的中点,联结 ES, EQ, MQ, NS, 则

$$NS = \frac{1}{2}OD, EQ = \frac{1}{2}OB$$

所以

$$\frac{NS}{EQ}=\frac{OD}{OB} \quad ①$$

又 $ES=\frac{1}{2}OA$，$MQ=\frac{1}{2}OC$，所以

$$\frac{ES}{MQ}=\frac{OA}{OC} \quad ②$$

而 $AD /\!/ BC$，所以

$$\frac{OA}{OC}=\frac{OD}{OB} \quad ③$$

由 ①，②，③ 得

$$\frac{NS}{EQ}=\frac{ES}{MQ}$$

因为 $\angle NSE=\angle NSA+\angle ASE=\angle AOD+2\angle AOE$

$$\angle EQM=\angle MQO+\angle OQE=(\angle AOE+\angle EOB)+(180^\circ-2\angle EOB)=\angle AOE+(180^\circ-\angle EOB)=\angle AOD+2\angle AOE$$

即

$$\angle NSE=\angle EQM$$

所以

$$\triangle NSE\backsim\triangle EQM$$

故

$$\frac{EN}{EM}=\frac{SE}{QM}=\frac{OA}{OC}(\text{由 ②})$$

同理可得

$$\frac{FN}{FM}=\frac{OA}{OC}$$

所以

$$\frac{EN}{EM}=\frac{FN}{FM}$$

从而

$$EM\cdot FN=EN\cdot FM$$

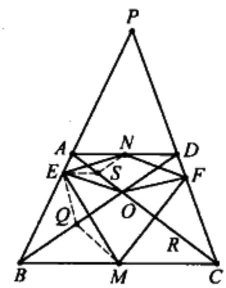


图 2

2 求所有的素数对 (p,q)，使得 $pq \mid 5^p+5^q$.

解 若 $2\mid pq$，不妨设 $p=2$，则 $2q\mid 5^2+5^q$，故 $q\mid 5^q+25$.

由费马小定理，$q\mid 5^q-5$，得 $q\mid 30$，即 $q=2,3,5$. 易验证素数对 $(2,2)$ 不合要求，$(2,3)$，$(2,5)$ 合乎要求.

若 pq 为奇数且 $5\mid pq$，不妨设 $p=5$，则 $5q\mid 5^5+5^q$，故 $q\mid 5^{q-1}+625$.

当 $q=5$ 时素数对 $(5,5)$ 合乎要求，当 $q\neq 5$ 时，由费马小定理有 $q\mid 5^{q-1}-1$，故 $q\mid 626$. 由于 q 为奇素数，而 626 的奇数因子只有 313，所以 $q=313$，经检验素数对 $(5,313)$ 合乎要求.

若 p,q 都不等于 2 和 5，则有 $pq\mid 5^{p-1}+5^{q-1}$，故

$$5^{p-1}+5^{q-1}\equiv 0 \pmod p \quad ①$$

由费马小定理，得

$$5^{p-1}\equiv 1 \pmod p \quad ②$$

故由 ①，② 得

$$5^{q-1}\equiv -1 \pmod p \quad ③$$

设 $p-1=2^k(2r-1)$，$q-1=2^l(2s-1)$，其中 k,l,r,s 为正整数.

若 $k\leqslant l$，则由②，③易知

$$1=1^{2^{l-k}(2s-1)}\equiv(5^{p-1})^{2^{l-k}(2s-1)}=5^{2^l(2r-1)(2s-1)}=$$
$$(5^{q-1})^{2r-1}\equiv(-1)^{2r-1}\equiv-1\pmod p$$

这与 $p\neq2$ 矛盾！所以 $k>l$.

同理有 $k<l$，矛盾！即此时不存在合乎要求的 (p,q).

综上所述，所有满足题目要求的素数对 (p,q) 为

$$(2,3),(3,2),(2,5),(5,2),(5,5),(5,313)\text{ 及 }(313,5)$$

3 设 m,n 是给定的整数，$4<m<n$，$A_1A_2\cdots A_{2n+1}$ 是一个正 $2n+1$ 边形，$P=\{A_1,A_2,\cdots,A_{2n+1}\}$. 求顶点属于 P 且恰有两个内角是锐角的凸 m 边形的个数.

解 先证一个引理：顶点在 P 中的凸 m 边形至多有两个锐角，且有两个锐角时，这两个锐角必相邻.

事实上，设这个凸 m 边形为 $P_1P_2\cdots P_m$，只考虑至少有一个锐角的情况，此时不妨设 $\angle P_mP_1P_2<\frac{\pi}{2}$，则

$$\angle P_2P_jP_m=\pi-\angle P_2P_1P_m>\frac{\pi}{2},3\leqslant j\leqslant m-1$$

更有
$$\angle P_{j-1}P_jP_{j+1}>\frac{\pi}{2},3\leqslant j\leqslant m-1$$

而 $\angle P_1P_2P_3+\angle P_{m-1}P_mP_1>\pi$，故其中至多一个为锐角，这就证明了引理.

由引理知，若凸 m 边形中恰有两个内角是锐角，则它们对应的顶点相邻.

在凸 m 边形中，设顶点 A_i 与 A_j 为两个相邻顶点，且在这两个顶点处的内角均为锐角. 设 A_i 与 A_j 的劣弧上包含了 P 的 r 条边 $(1\leqslant r\leqslant n)$，这样的 (i,j) 在 r 固定时恰有 $2n+1$ 对.

(1) 若凸 m 边形的其余 $m-2$ 个顶点全在劣弧 A_iA_j 上，而 A_iA_j 劣弧上有 $r-1$ 个 P 中的点，此时这 $m-2$ 个顶点的取法数为 C_{r-1}^{m-2}.

(2) 若凸 m 边形的其余 $m-2$ 个顶点全在优弧 A_iA_j 上，取 A_i,A_j 的对径点 B_i,B_j，由于凸 m 边形在顶点 A_i,A_j 处的内角为锐角，所以，其余的 $m-2$ 个顶点全在劣弧 B_iB_j 上，而劣弧 B_iB_j 上恰有 r 个 P 中的点，此时这 $m-2$ 个顶点的取法数为 C_r^{m-2}.

所以，满足题设的凸 m 边形的个数为

$$(2n+1)\sum_{r=1}^{n}(C_{r-1}^{m-2}+C_r^{m-2})=(2n+1)\left(\sum_{r=1}^{n}C_{r-1}^{m-2}+\sum_{r=1}^{n}C_r^{m-2}\right)=$$
$$(2n+1)\left(\sum_{r=1}^{n}(C_r^{m-1}-C_{r-1}^{m-1})+\sum_{r=1}^{n}(C_{r+1}^{m-1}-C_r^{m-1})\right)=$$
$$(2n+1)(C_{n+1}^{m-1}+C_n^{m-1})$$

4 给定整数 $n\geqslant 3$,实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 满足 $\min\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}|a_i-a_j|=1$.求 $\sum\limits_{k=1}^{n}|a_k|^3$ 的最小值.

解 不妨设 $a_1<a_2<\cdots<a_n$,则对 $1\leqslant k\leqslant n$,有
$$|a_k|+|a_{n-k+1}|\geqslant|a_{n-k+1}-a_k|\geqslant|n+1-2k|$$
所以
$$\sum_{k=1}^{n}|a_k|^3=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(|a_k|^3+|a_{n+1-k}|^3)=$$
$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(|a_k|+|a_{n+1-k}|)\left(\frac{3}{4}(|a_k|-|a_{n+1-k}|)^2+\frac{1}{4}(|a_k|+|a_{n+1-k}|)^2\right)\geqslant$$
$$\frac{1}{8}\sum_{k=1}^{n}(|a_k|+|a_{n+1-k}|)^3\geqslant$$
$$\frac{1}{8}\sum_{k=1}^{n}|n+1-2k|^3$$
当 n 为奇数时
$$\sum_{k=1}^{n}|n+1-2k|^3=2\cdot 2^3\cdot\sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}}i^3=\frac{1}{4}(n^2-1)^2$$
当 n 为偶数时
$$\sum_{k=1}^{n}|n+1-2k|^3=2\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}}(2i-1)^3=2\left(\sum_{j=1}^{n}j^3-\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}}(2i)^3\right)=$$
$$\frac{1}{4}n^2(n^2-2)$$

所以,当 n 为奇数时,$\sum\limits_{k=1}^{n}|a_k|^3\geqslant\frac{1}{32}(n^2-1)^2$,当 n 为偶数时,$\sum\limits_{k=1}^{n}|a_k|^3\geqslant\frac{1}{32}n^2(n^2-2)$,等号均在 $a_i=i-\frac{n+1}{2}$,$i=1,2,\cdots,n$ 时成立.

因此,$\sum\limits_{k=1}^{n}|a_k|^3$ 的最小值为 $\frac{1}{32}(n^2-1)^2$(n 为奇数),或者 $\frac{1}{32}n^2(n^2-2)$(n 为偶数).

5 凸 n 边形P中的每条边和每条对角线都被染为n种颜色中的一种颜色.问:对怎样的 n,存在一种染色方式,使得对于这 n 种颜色中的任何 3 种不同颜色,都能找到一个三角形,其顶点为多边形 P 的顶点,且它的 3 条边分别被染为这 3 种颜色?

解 当 $n \geqslant 3$ 为奇数时,存在合乎要求的染法;当 $n \geqslant 4$ 为偶数时,不存在所述的染法.

每 3 个顶点形成一个三角形,三角形的个数为 C_n^3 个,而颜色的三三搭配也刚好有 C_n^3 种,所以本题相当于要求不同的三角形对应于不同的颜色组合,即形成一一对应.

我们将多边形的边与对角线都称为线段.对于每一种颜色,其余的颜色形成 C_{n-1}^2 种搭配,所以每种颜色的线段(边或对角线)都应出现在 C_{n-1}^2 个三角形中,这表明在合乎要求的染法中,各种颜色的线段条数相等,所以每种颜色的线段都应当有$\frac{C_n^2}{n} = \frac{n-1}{2}$条.

当 n 为偶数时,$\frac{n-1}{2}$ 不是整数,所以不可能存在合乎条件的染法.下设 $n = 2m+1$ 为奇数,我们来给出一种染法,并证明它满足题中条件.自某个顶点开始,按顺时针方向将凸 $2m+1$ 边形的各个顶点依次记为 $A_1, A_2, \cdots, A_{2m+1}$.对于 $i \notin \{1,2,\cdots,2m+1\}$,按 mod $2m+1$ 理解顶点 A_i,再将 $2m+1$ 种颜色分别记为颜色 1, 2, $\cdots$, $2m+1$.

将边 A_iA_{i+1} 染为颜色 i,其中 $i = 1,2,\cdots,2m+1$.再对每个 $i=1,2,\cdots,2m+1$,都将线段(对角线)$A_{i-k}A_{i+1+k}$染为颜色i,其中 $k = 1,2,\cdots,m-1$.于是每种颜色的线段都刚好有 m 条.注意,在我们的染色方法之下,线段 $A_{i_1}A_{j_1}$ 与 $A_{i_2}A_{j_2}$ 同色,当且仅当

$$i_1 + j_1 \equiv i_2 + j_2 \pmod{2m+1} \quad ①$$

因此,对任何 $i \neq j \pmod{2m+1}$,任何 $k \neq 0 \pmod{2m+1}$,线段 A_iA_j 都不与 $A_{i+k}A_{j+k}$ 同色.换言之,如果

$$i_1 - j_1 \equiv i_2 - j_2 \pmod{2m+1} \quad ②$$

则线段 $A_{i_1}A_{j_1}$ 都不与 $A_{i_2}A_{j_2}$ 同色.

任取两个三角形 $\triangle A_{i_1}A_{j_1}A_{k_1}$ 和 $\triangle A_{i_2}A_{j_2}A_{k_2}$,如果它们之间至多只有一条边同色,当然它们不对应相同的颜色组合.如果它们之间有两条边分别同色,我们来证明第 3 条边必不同颜色.为确定起见,不妨设 $A_{i_1}A_{j_1}$ 与 $A_{i_2}A_{j_2}$ 同色.

(1) 如果 $A_{j_1}A_{k_1}$ 与 $A_{j_2}A_{k_2}$ 也同色,则由 ① 知

$$i_1 + j_1 \equiv i_2 + j_2 \pmod{2m+1}$$

$$j_1 + k_1 \equiv j_2 + k_2 \pmod{2m+1}$$

将二式相减,得 $i_1 - k_1 \equiv i_2 - k_2 \pmod{2m+1}$,故由 ② 知 $A_{k_1}A_{i_1}$ 不与 $A_{k_2}A_{i_2}$ 同色.

(2) 如果 $A_{i_1}A_{k_1}$ 与 $A_{i_2}A_{k_2}$ 也同色,则亦由 ① 知

$$i_1 + j_1 \equiv i_2 + j_2 \pmod{2m+1}$$

$$i_1 + k_1 \equiv i_2 + k_2 \pmod{2m+1}$$

将二式相减,亦得 $j_1 - k_1 \equiv j_2 - k_2 \pmod{2m+1}$,亦由 ② 知 $A_{j_1}A_{k_1}$ 与 $A_{j_2}A_{k_2}$ 不同色. 总之,$\triangle A_{i_1}A_{j_1}A_{k_1}$ 与 $\triangle A_{i_2}A_{j_2}A_{k_2}$ 对应不同的颜色组合.

6 给定整数 $n \geqslant 3$,证明:存在 n 个互不相同的正整数组成的集合 S,使得对 S 的任意两个不同的非空子集 A, B,数

$$\frac{\sum\limits_{x \in A} x}{|A|} \text{ 与 } \frac{\sum\limits_{x \in B} x}{|B|}$$

是互素的合数.(这里 $\sum\limits_{x \in X} x$ 与 $|X|$ 分别表示有限数集 X 的所有元素之和及元素个数.)

证明 我们用 $f(X)$ 表示有限数集 X 中元素的算术平均.

第一步,我们证明,正整数的 n 元集合 $S_1 = \{(m+1)! \mid m = 1, 2, \cdots, n\}$ 具有下述性质:对 S_1 的任意两个不同的非空子集 A, B,有 $f(A) \neq f(B)$.

对任意 $A \subseteq S_1$,$A \neq \varnothing$,设正整数 k 满足

$$k! < f(A) \leqslant (k+1)! \qquad ①$$

并设 l 是使 $lf(A) \geqslant (k+1)!$ 的最小正整数. 我们首先证明必有 $|A| = l$.

事实上,设 $(k'+1)!$ 是 A 中最大的数,则由 $A \subseteq S_1$,易知 A 中至多有 k' 个元素,即 $|A| \leqslant k'$,故 $f(A) \geqslant \frac{(k'+1)!}{k'} > k'!$. 又由 $f(A)$ 的定义知 $f(A) \leqslant (k'+1)!$,故由 ① 知 $k = k'$. 特别地有 $|A| \leqslant k$.

此外,显然 $|A| f(A) \geqslant (k'+1)! = (k+1)!$,故由 l 的定义可知 $l \leqslant |A|$,于是我们有 $l \leqslant |A| \leqslant k$.

若 $l = k$,则 $|A| = l$;否则有 $l \leqslant k-1$,则

$$(l+1)f(A) = \left(1 + \frac{1}{l}\right)lf(A) \geqslant \left(1 + \frac{1}{k-1}\right)(k+1)! > (k+1)! + k! + \cdots + 2!$$

由于 $(k+1)!$ 是 A 中最大元,故上式表明 $|A| < l + 1$. 结合

$|A| \geqslant l$ 即知 $|A| = l$.

现在,若有 S_1 的两个不同的非空子集 A, B,使得 $f(A) = f(B)$,则由上述证明知 $|A| = |B| = l$,故 $|A| f(A) = |B| f(B)$,但这等式两边分别是 A, B 的元素和,利用 $(m+1)! > m! + \cdots + 2!$ 易知必须 $A = B$,矛盾.

第二步,设 K 是一个固定的正整数,$K > n! \max\limits_{A_1 \subseteq S_1} f(A_1)$,我们证明,对任何正整数 x,正整数的 n 元集合 $S_2 = \{K! n! x\alpha + 1 \mid \alpha \in S_1\}$ 具有下述性质:对 S_2 的任意两个不同的非空子集 A, B,数 $f(A)$ 与 $f(B)$ 是两个互素的整数.

事实上,由 S_2 的定义易知,有 S_1 的两个子集 A_1, B_1,满足 $|A_1| = |A|$, $|B_1| = |B|$,且

$$f(A) = K! n! x f(A_1) + 1, f(B) = K! n! x f(B_1) + 1 \qquad ②$$

显然 $n! f(A_1)$ 及 $n! f(B_1)$ 都是整数,故由上式知 $f(A)$ 与 $f(B)$ 都是正整数.

现在设正整数 d 是 $f(A)$ 与 $f(B)$ 的一个公约数,则

$$n! f(A) f(B_1) - n! f(B) f(A_1)$$

是 d 的倍数,故由 ② 可知 $d \mid n! f(A_1) - n! f(B_1)$,但由 K 的选取及 S_1 的构作可知,$|n! f(A_1) - n! f(B_1)|$ 是小于 K 的非零整数,故它是 $K!$ 的约数,从而 $d \mid K!$.再给合 $d \mid f(A)$ 及 ② 可知 $d = 1$,故 $f(A)$ 与 $f(B)$ 互素.

第三步,我们证明,可选择正整数,使得 S_2 中的数都是合数.由于素数有无穷多个,故可选择 n 个互不相同且均大于 K 的素数 $p_1, p_2, \cdots, p_n$. 将 S_1 中元素记为 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$,则 $(p_i, K! n! \alpha_i) = 1 (1 \leqslant i \leqslant n)$,且 $(p_i^2, p_j^2) = 1$(对 $1 \leqslant i < j \leqslant n$),故由中国剩余定理可知,同余方程组

$$K! n! x \alpha_i \equiv -1 \pmod{p_i^2}, i = 1, 2, \cdots, n$$

有正整数解.

任取这样一个解 x,则相应的集合 S_2 中每一项显然都是合数.结合第二步的结果,这一 n 元集合满足问题的全部要求.

后 记 | Postscript

明末清初思想界巨擘顾亭林曾云:"一为文人,便无足观."以古律今,可知此语实为平凡而不朽之真理,尤其是放在那些无力提出新定理和新证明而一味整理已有结果和解法的数学及数学竞赛界的二线人员身上,这更是"一语成谶"式的宿命.以编者逾20年从事奥林匹克数学的教学和研究的切身体会感到:对于一个学习数学的人而言,把研究数学奥林匹克作为他的一份业余爱好会是很享受的,因为他会让你接触到最优秀的中学生,也会使你全面了解与之相关的数学的各个分支,而不像职业数学家那样将毕生精力都投入到一个相对狭窄的领域甚至是一个猜想上,但要是把研究数学竞赛当做他自己谋生的饭碗,则是真正的意想,因为在大学里并没有这样的岗位存在.

在编写此书的过程中使我回想起了30年前我在学生时代所买到的第一本试题集,是科学普及出版社出版的全国数学竞赛委员会编的《全国中学生数学竞赛题解》(1978年出版,定价仅0.30元),当时我最愿意读的是华罗庚先生所写的序言和附录,直到现在编者还清楚地记得当时由国务院副总理方毅担任全国数学竞赛委员会名誉主任,中国科学院副院长、中国数学会理事长华罗庚担任主任,当时的竞赛一等奖共五名,他们分别是上海鲁迅中学的李骏,北京第42中的严勇,北京大学附中的胡波,广州第95中学的王丰和59中学的曹孟麟,受当时政治气候的影响还统计出来在全国择优录选的59名优胜者中,出生于劳动人民家庭的占95.6%。

受青年数论专家曹珍富先生(现为上海交通大学教授)影响,曾一度对数论很感兴趣,特别是不定方程(也称丢番图方程),这就自然要读到莫德尔(Louis Joel Mordell)的著作,也了解了一些他的轶事.英国著名数论大师、丢番图分析专家莫德尔 1971 年在《美国数学月刊》(11 月号)上发表了他的回忆文章《一个 80 岁数学家的回忆》,他回忆说:"大约 14 岁进入高中之前,我在费城有名的里尔(Leary)书店的 5 美分和 10 美分特价书柜台偶然看到了一些旧的代数书.不知什么原因,这个学科吸引了我.其中一本书是哈克雷(C. W. Hackely)的《论代数》,作者在 1843 ~ 1861 年间是当时纽约市哥伦比亚学院的教授.我看到的是 1849 年第 3 版(第 1 版出版于 1846 年).那真是一本好书,虽然不太严密,但包含了大量的材料,包括方程理论、级数和一章数论.同那个时代的老代数书一样,这本书有一章讲丢番图分析,这是我最感兴趣的主题.我后来的许多最好的研究都是关于这个主题的,不能说和它没有关系,事实上,我最近写了一本关于这个题目的书,出版于 1969 年,即《Diophantihe Equations》(New York Academic Press, 1969)."

由此有一点可借鉴的是起一个好书名很重要,既使起不出那种神秘而又能吸引读者的书名,也不能起一个令人费解的书名,在这方面我们有一点教训,本系列丛书的第一本是《历届 IMO 试题集》,在数学竞赛圈人人都知道 IMO 是国际数学奥林匹克的英文缩写,即 International Mathematical Olympiad. 我们开始以为这个书名很清楚简洁,但随后问题来了,首先很多发行人员不知道这是一本关于什么的书,甚至以为是关于某个行业标准的考试用书,有的书店的售货员一开始也并不知道将它置于何处,其次有些家长和低级别的选手也不知道这个缩写,所以在销售上受到一定影响.

但有的时候一个略显生僻的书名倒是会吸引人注意. 1996 年商务印书馆出版了一本计算机与人工智能方面的大书,即霍夫斯塔特的《哥德尔、艾舍尔、巴赫——集异壁之大战》(英文书名为《Gödel, Escher, Bach: an Eternal Golden Braid》),霍夫斯塔特是国际著名人工智能专家,走上专业道路源于两本书,他在给欧内斯特·内格尔(Ernest Nagel)和詹姆士·R·纽曼(Janles R. Newman)的《哥德尔证明》(《Gödel's Proof》)(新版)所写的序言中写道:

"1959 年 8 月,结束了在日内瓦一年的居留之后,我们全家回到了加利福尼亚州的斯坦福,那年我 14 岁,法语刚变流利,喜好各种语言,开始了解书写系统、符号以及语义的神秘,充满了对数学和思维奥秘的好奇.

"一个傍晚,父亲和我去逛一家书店(门罗公园的开普勒书店).我不经意地看到一本薄书,有个神秘的书名叫《哥德尔证明》,我随手翻了一下,发现书中有许多诱人的图形和公式,其中一个脚注特别吸引我,它谈到引号、符号以及将其他符号符号化的符号,直觉地感到《哥德尔证明》好像注定和我会有某种关联,我想我必须买下这本书."

多年后功成名就的霍夫斯塔特又意外地收到纽约大学出版社的来函,问他是否可考虑为那本他十几岁时买到的书写一个新版序言,这就是出版的魅力和书的历史与轮回.

我们也一直期待着这样的奇遇和机缘,在哈尔滨的奥赛选手中已经出现了丘成桐先生的博士罗炜,成长为陶哲轩和佩雷尔曼式的大家指日可待.

其实除 CMO 外,在竞赛圈内还有许多缩略语,如 CGMO——中国女子数学奥林匹克,WCMO——中国西部数学奥林匹克,待成熟后我们也会出版相应的试题集,有人批评中国有些人言必称希腊,现在数学界则是一切向美国看齐,我们也无法免俗.

美国的几大中学生数学竞赛的简称分别是 AHSME、AIME、USAMO,具体情况是:在美国每年的 2 月下旬或 3 月初举行美国中学生数学竞赛即 AHSME,约 40 万人参加,满分 150 分.自 1983 年起,在该赛中得分大于或等于 100 分的学生被邀请参加 3 月下旬举行的美国数学邀请赛即 AIME,满分为 15 分,从参赛者所获得的 AHSME 得分 + 10 × AIME 得分选出大约 150 人参加 4 月下旬举行的美国数学奥林匹克即 USAMO(与 CMO 相当),满分为 100 分,并以 AHSME + 10 × AIME + 4 × USAMO 的得分计算参赛者得分,选出 20 人组成美国数学奥林匹克国家集训队.

对于这样一本试题集,虽然解答均出自名家之手,但在排版、校对过程中疏漏还是难免的.

有人问哈佛大学的韦德(David Widder):"你对巴特曼(Buteman)的那本微分方程的书有什么看法? 那是一本好书,是吗?""那本书啊!"韦德感叹道,"随便你翻到哪一页,随便指一句黑体印刷的陈述,我都能找出一个反例."

我们希望别出现这样的问题便足矣了,最后向所有命题人、解答者表示感谢.

刘培杰

2008.9.1